ISSN 1993-6191

ТЕОРИЯ И ТЕХНИКА РАДИОСВЯЗИ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК

ОАО КОНЦЕРН СОЗВЕЗДИЕ

1 2007

ТЕОРИЯ И ТЕХНИКА РАДИОСВЯЗИ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК

ВЫПУСК 1

Воронеж 2007

© ОАО «Концерн «Созвездие», 2007

Главный редактор
докт.техн.наук, проф., чл.-кор. МАИ
В.И. НИКОЛАЕВ

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ:

Председатель
докт.техн.наук, проф., чл.-кор. РАН
В.И. БОРИСОВ

Зам. председателя
докт.техн.наук, проф., чл.-кор.МАИ
В.И. НИКОЛАЕВ

докт.физ.-мат.наук, проф.
Э.К. АЛГАЗИНОВ (г.Воронеж)
докт.техн.наук,, проф.
А.С. БАГДАСАРЯН (г.Москва)
докт.физ.-мат.наук, проф.
Ю.С. БАЛАШОВ (г.Воронеж)
докт.техн.наук, проф., академик РАН
А.С. БУГАЕВ (г.Москва)
докт.техн.наук, проф.
В.И. ВЛАДИМИРОВ (г.Воронеж)
докт.физ.-мат.наук, проф., академик РАН
Ю.В. ГУЛЯЕВ (г.Москва)
докт.техн.наук, проф.
Ю.В. ЗАВРАЖНОВ (г.Воронеж)
докт.техн.наук, проф.
Ю.Л. КОЗИРАЦКИЙ (г.Воронеж)
докт.техн.наук, проф.
В.И. КУЗНЕЦОВ (г.Воронеж)
докт.техн.наук, проф., академик РАН
Н.А. КУЗНЕЦОВ (г.Москва)
докт.техн.наук, с.н.с.
И.И. МАЛЫШЕВ (г.Воронеж)
докт.физ.-мат.наук, проф.
Ю.Б. НЕЧАЕВ (г.Воронеж)
докт.техн.наук, проф.
В.Н. ПОВЕТКО (г.Воронеж)
докт.техн.наук, проф.
Ю.С. СУХОРУКОВ (г.Воронеж)
докт.техн.наук, проф., академик РАЕН
Б.И. ШАХТАРИН (г.Москва)
докт.техн.наук, проф.
А.П. ЯРЫГИН (г.Воронеж)

Научно-технический сборник «Теория и техника радиосвязи» издается с 1966 года. Периодичность выпуска – один раз в полугодие.

В номерах сборника публикуются статьи ведущих специалистов ВНИИС (ОАО "Концерн "Созвездие") и отрасли по общим вопросам радиосвязи, теоретическим и экспериментальным исследованиям в области передачи непрерывных и дискретных сообщений, проблемам помехоустойчивости и методам передачи информации в условиях высокоорганизованного радиопротиводействия; особенностям построения различных видов систем связи с использованием узкополосных и широкополосных шумоподобных сигналов; ЭМС различных систем связи; моделированию систем и средств радиосвязи, отдельных функциональных узлов и блоков.

Учредитель и издатель:

ОАО «Концерн «Созвездие»

Сборник зарегистрирован
в государственном комитете РФ по печати.
Регистрационный номер
ПИ №ФС77-26367 от 24 ноября 2006 г.

Адрес редакции:

394018, г.Воронеж, ул.Плехановская, 14
ОАО «Концерн «Созвездие», редакция сборника
«Теория и техника радиосвязи».
Тел. 52-13-59
E-mail: osp@sozvezdie.su

Набор и верстка компьютерные
Формат 60×88 ⅛. Уч.-изд.л. 10,2
Тираж 200 экз. Заказ № 30
Подписано в печать 25.04.07г.

© ОАО «Концерн «Созвездие», 2007

С О Д Е Р Ж А Н И Е

ВЫПУСК 1, 2007

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ РАДИОСВЯЗИ

Последовательный алгоритм определения частотного элемента сигнала с ППРЧ. Часть II. Оптимальное правило остановки и численные расчеты
В.И. Борисов, В.М. Зинчук, А.Е. Лимарев, А.В. Немчилов 5

Многокритериальная оценка качества сложных систем передачи информации и средств связи методом последовательного принятия решений с использованием совокупности несопоставимых критериев
В.В. Майоров 15

Анализ модифицированного рекуррентного алгоритма пространственно-временной обработки сигналов в адаптивном линейном сумматоре
А.В. Рыжков, А.А. Темнышов 22

Анализ вынужденных процессов в радиотехнических колебательных системах методом бесконечных систем уравнений
Ю.Б. Нечаев, Н.Д. Бирюк, Е.В. Латышева 27

Условия стремления к нулю произведений интегралов вероятности со степенными и экспоненциальными функциями
Н.Е. Коротков 36

Интегралы, содержащие степенные, показательные функции, комбинации интегралов вероятности, их дополнения до предельных значений
Н.Е. Коротков 45

ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ И АЛГОРИТМЫ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ УСТРОЙСТВ РАДИОСВЯЗИ

Оптимизация диалога человек – машина как один из путей повышения оперативности принятия решения должностным лицом в ЕСУ ТЗ
Д.З. Арифуллин, А.Н. Дереев, И.В. Сальтевский 55

Практическая реализация маршрутизации пакетов в мобильных сетях пакетной радиосвязи
А.А. Чернигин, А.А. Ступина, Н.Н. Авдеев 60

Оптимизация поиска широкополосных сигналов в спутниковых линиях связи
А.Г. Филатов 64

Формальная постановка задачи оптимизации маршрутизации
А.А.Донченко, А.А.Новопольцев, А.А.Подлежанский 69

Об одном методе разделения сигналов в охранно-сигнализационных системах связи
Г.В. Волобуев, Н.Н. Семенов, В.Д. Лукьянчиков, В.И. Ледовских 73

Сравнительная оценка коммутационных способов уменьшения времени перестройки СЧ-ИФАПЧ по частоте
С.К. Романов, Н.М. Тихомиров, М.Н. Тихомиров, И.А. Марков 79

Оперативная оценка параметров зон влияния РЭС
Е.А. Хромых, А.А. Чаплыгин, С.Н. Шульженко, В.Ф. Блинов 89

Влияние нелинейности импульсно-фазового детектора на спектр помех в системе ИФАПЧ с дробным делителем частоты
С.К. Романов, И.А. Марков 92

ЭЛЕМЕНТНАЯ БАЗА ТЕХНИКИ РАДИОСВЯЗИ

Машина состояний процесса переключения фазы на произвольный угол в высокодобротном последовательном колебательном контуре
Н.М. Назаров 102

Сопряжение электронно-перестраиваемых фильтров
М.А. Корольков, Л.А. Мальцева 105

УДК 621.391:519.27

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТОТНОГО ЭЛЕМЕНТА СИГНАЛА С ППРЧ. ЧАСТЬ II. ОПТИМАЛЬНОЕ ПРАВИЛО ОСТАНОВКИ И ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ

В.И. БОРИСОВ, В.М. ЗИНЧУК, А.Е. ЛИМАРЕВ, А.В. НЕМЧИЛОВ

Для определения частотного элемента сигнала с ППРЧ предлагается байесовская последовательная процедура с оптимальным правилом остановки, обеспечивающим максимальное время накрытия ответной помехой данный частотный элемент. Рассмотрено оптимальное правило остановки и проведены численные расчеты оценки эффективности последовательной процедуры.

В первой части работы [1] рассмотрен в общем виде последовательный алгоритм определения частотного элемента сигнала с ППРЧ. Рассмотрены также частные случаи алгоритма при когерентной и некогерентной обработке.

Во второй части работы рассмотрены оптимальные и квазиоптимальные правила остановки последовательной процедуры и проведены численные расчеты и имитационное моделирование.

1. Правило остановки

Критерием оценки эффективности станции ответных помех является среднее время накрытия ответной помехой сигнала с ППРЧ. При фиксированном времени обнаружения τ среднее время задается выражениями ([1], (2.6), (2.7)). Для последовательной процедуры среднее время накрытия в момент времени $n\Delta t$ определяется зависимостью ([1], (2.8а,б)). Так как номер канала с сигналом выбирается в соответствии с максимальной апостериорной вероятностью, вычисленной после n наблюдений, то вероятность правильного различения

$$P_r\left(n\Delta t\right) = \\ = P\left\{H = H_k \middle| X\left(1\right),...,X\left(n\right)\right\} = P_k\left(n\right), \quad (1.1)$$

где k выбирается в соответствии с ([1], (1.6)).

Поэтому среднее время накрытия в текущий n-й момент времени можно записать следующим образом:

$$\overline{T}\left(n\right) = \left(T_h - n\Delta t\right)\overline{P}_k\left(n\right) \quad (1.2)$$

для синхронного случая и

$$\overline{T}\left(n\right) = \left(\sqrt{T_h} - \sqrt{\frac{n\Delta t}{2}}\right)^2 \overline{P}_k\left(n\right) \quad (1.3)$$

для асинхронного случая, где $\overline{P}_k\left(n\right)$ – среднее значение для максимальной апостериорной вероятности.

Прямое вычисление максимума. Заметим, что, как показано в [2,3], на первых шагах последовательной процедуры среднее время накрытия будет возрастать. Затем, достигнув максимального значения, начнет убывать. Таким образом, в идеале оптимальный момент окончания последовательной процедуры наблюдения должен соответствовать максимальному среднему времени накрытия, т.е. должен удовлетворять условиям

$$\overline{T}\left(n_{opt}\right) > \overline{T}\left(n_{opt} - 1\right);\ \overline{T}\left(n_{opt}\right) > \overline{T}\left(n_{opt} + 1\right). \quad (1.4)$$

Заметим, что условия (1.4) должно выполняться в среднем, а на реализациях оно может и нарушаться. Поскольку в канале с сигналом на начальном этапе среднее время возрастает, то условие окончания процедуры можно свести к проверке второй части неравенства (1.4)

Таким образом, в упрощенном варианте условие останова запишется следующим образом: первое n, для которого выполняется условие

$$\frac{\overline{T}\left(n+1\right)}{\overline{T}\left(n\right)} < 1, \quad (1.5)$$

является n_{opt}.

Обозначим через $Q_1\left(n\right)$ и $Q_2\left(n\right)$ отношение временных множителей для соседних временных отсчетов в формуле для среднего времени накрытия:

$$Q_1\left(n\right) = \left(T_h - \left(n+1\right)\Delta t\right) \Big/ \left(T_h - n\Delta t\right), \quad (1.6)$$

$$Q_2\left(n\right) = \left(\sqrt{T_h} - \sqrt{\frac{\left(n+1\right)\Delta t}{2}}\right)^2 \Bigg/ \left(\sqrt{T_h} - \sqrt{\frac{n\Delta t}{2}}\right)^2,$$

$$n\Delta t \le \frac{T_n}{2}. \qquad (1.7)$$

С учетом сделанных обозначений условие останова перепишем следующим образом:

$$\frac{Q_i(n)\overline{P}_k(n+1)}{\overline{P}_k(n)} < 1, \ (i=1,2) \qquad (1.8)$$

или в эквивалентном виде

$$\frac{\overline{P}_k(n)}{\overline{P}_k(n+1)} \ge Q_i(n). \qquad (1.9)$$

Правило остановки на основе необходимых условий экстремума. Среднее время накрытия как функция от времени наблюдения τ имеет вид

$$\overline{T}(\tau) = P_{\text{об}}(\tau)V(\tau), \qquad (1.11)$$

где

$$V(\tau) = T_h - \tau \qquad (1.12)$$

в синхронном режиме и

$$V(\tau) = \left(\sqrt{T_h} - \sqrt{\frac{\tau}{2}}\right)^2 \qquad (1.13)$$

в асинхронном режиме подавления.

Оптимальное правило остановки соответствует максимуму среднего времени накрытия ([1], (2.6), (2.7)). Необходимым, но в силу выпуклости вверх функции $\overline{T}(\tau)$ и достаточным условием максимума является равенство нулю производной

$$\frac{d\overline{T}(\tau)}{d\tau} = \frac{dP_{\text{об}}}{d\tau}V(\tau) + P_{\text{об}}(\tau)\frac{dV(\tau)}{d\tau} = 0 \qquad (1.14)$$

или после преобразований

$$\frac{d\ln P_{\text{об}}(\tau)}{d\tau} = -\frac{d\ln V(\tau)}{d\tau}. \qquad (1.15)$$

Например, для синхронного режима подавления

$$-\frac{d\ln V}{d\tau} = -\frac{d}{d\tau}\ln(T_h - \tau) = \frac{1}{T_h - \tau}; \qquad (1.16)$$

для асинхронного режима

$$-\frac{d\ln V}{d\tau} = -\frac{d}{d\tau}\ln\left(\sqrt{T_h} - \sqrt{\frac{\tau}{2}}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2\left(\sqrt{T_h} - \sqrt{\frac{\tau}{2}}\right)\sqrt{\frac{\tau}{2}}}. \qquad (1.17)$$

Таким образом, необходимые условия экстремума принимают вид

$$\frac{d\ln P_{\text{об}}(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{T_h - \tau} \qquad (1.18)$$

для синхронного режима и

$$\frac{d\ln P_{\text{об}}(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{2\left(\sqrt{T_h} - \sqrt{\frac{\tau}{2}}\right)\sqrt{\frac{\tau}{2}}} \qquad (1.19)$$

для асинхронного режима.

Приведенные необходимые условия экстремума в непрерывном времени можно записать в конечных разностях. В этом случае производную аппроксимируем конечно-разностным выражением

$$\frac{d\ln P_{\text{об}}(\tau)}{d\tau} \approx -\frac{\ln P_{\text{об}}(n\Delta t) - \ln P_{\text{об}}\left((n+1)\Delta t\right)}{\Delta t}. \qquad (1.20)$$

После подстановки (1.20) в (1.16) и (1.17) получим необходимые условия экстремума в дискретном времени, где для простоты $P_{\text{об}}(n\Delta t)$ обозначим через $P_{\text{об}}(n)$:

$$\ln\frac{P_{\text{об}}(n)}{P_{\text{об}}(n+1)} = -\frac{\Delta t}{T_h - n\Delta t}, \qquad (1.21)$$

или после потенциирования и преобразования получим для синхронного режима условие останова последовательной процедуры:

$$\frac{P_{\text{об}}(n)}{P_{\text{об}}(n+1)} = e^{-\frac{\Delta t}{T_h - n\Delta t}}. \qquad (1.22)$$

Аналогичное условие останова можно записать и для асинхронного режима подавления:

$$\frac{P_{\text{об}}(n)}{P_{\text{об}}(n+1)} = e^{-\frac{\Delta t}{2\left(\sqrt{T_h} - \sqrt{\frac{n\Delta t}{2}}\right)\sqrt{\frac{n\Delta t}{2}}}}. \qquad (1.23)$$

Необходимые условия экстремума (1.22), (1.23) можно рассматривать как условия останова для последовательной процедуры. Поскольку разностная схема аппроксимирует производную с точностью до членов о(Δ*t*), то целесообразно удержать главные члены в разложении экспонент в правых частях (1.22), (1.23). После чего с точностью до главных членов условие останова примет вид

$$\frac{P_{\text{об}}(n)}{P_{\text{об}}(n+1)} = 1 - \frac{\Delta t}{T_h - n\Delta t} \qquad (1.24)$$

для синхронного режима и

$$\frac{P_{\text{об}}(n)}{P_{\text{об}}(n+1)} = 1 - \frac{\Delta t}{2\left(\sqrt{T_h} - \sqrt{\frac{n\Delta t}{2}}\right)\sqrt{\frac{n\Delta t}{2}}} \quad (1.25)$$

для асинхронного режима.

Сравним теперь полученный результат с условием останова, полученного прямым методом (1.9):

$$\frac{\overline{P}_j(n)}{\overline{P}_j(n+1)} \geq Q_i(n),\ (i=1,2), \quad (1.26)$$

где $Q_1(n)$ и $Q_1(n)$ определяются согласно (1.6) и (1.7)

После линеаризации выражений $Q_i(n)$ относительно Δt, получим

$$Q_1(n) \approx 1 - \frac{\Delta t}{T_h - n\Delta t}, \quad (1.27)$$

$$Q_2(n) \approx 1 - \frac{\Delta t}{2\left(\sqrt{T_h} - \sqrt{\frac{n\Delta t}{2}}\right)\sqrt{\frac{n\Delta t}{2}}}. \quad (1.28)$$

Таким образом, с точностью до членов $o(\Delta t)$ необходимое условие максимума и прямое вычисление максимума среднего времени накрытия приводят к одному и тому же правилу остановки последовательной процедуры.

Квазиоптимальные правила остановки. Как следует из изложенного ранее, оптимальное правило остановки сводится к сравнению с порогом отношения двух последовательных значений средней вероятности правильного обнаружения. Однако данное условие сложно проверить, так как оно оперирует со средним значением апостериорных вероятностей, вычисление которых в общем случае затруднительно. Поэтому рассмотрим два субоптимальных правила остановки.

Первое правило основано на применении условного среднего значения вероятности правильного обнаружения. Пусть проведено n наблюдений, по результатам которых вычислены реализации апостериорных вероятностей $P_j(n)$, $j=1,...,M$. Если $(n+1)$ наблюдение приводит в среднем к увеличению времени накрытия, то процедура продолжается. В противном случае процедура прекращается. При сделанных предположениях правило остановки (1.9), (1.26) может быть переписано следующим образом:

$$\frac{P_j(n)}{E_{n+1}\{P_j(n+1)\}} \geq Q_i(n),\ i=1,2, \quad (1.29)$$

где $E_{n+1}\{\cdot\}$ – усреднение по $(n+1)$-й реализации, которое в соответствии с ([1], (2.5)) можно записать следующим образом:

$$E_{n+1}\{P_j(n+1)\} = E_{n+1}\left\{\frac{P_j(n)\lambda\left(x_j(n+1)\right)}{\sum_{m=1}^{M} P_m(n)\lambda\left(x_m(n+1)\right)}\right\} =$$

$$= E_{n+1}\left\{\frac{1}{1+\sum_{m\neq j}\frac{P_m(n)}{P_j(n)}\frac{\lambda\left(x_m(n+1)\right)}{\lambda\left(x_j(n+1)\right)}}\right\}. \quad (1.30)$$

Для вычисления среднего значения максимальной апостериорной вероятности воспользуемся разложением в ряд Тейлора функции

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + ... + (-1)^n x^n + ...,\ |x| < 1. \quad (1.31)$$

Обозначим через

$$x = \sum_{m\neq j}^{M}\frac{P_m(n)}{P_j(n)}\frac{\lambda\left(x_m(n+1)\right)}{\lambda\left(x_j(n+1)\right)}. \quad (1.32)$$

Тогда среднее значение для $(n+1)$-й реализации можно записать следующим образом:

$$E_{n+1}\{P_j(n+1)\} =$$

$$= E_{n+1}\left\{1 - x + x^2 + ... + (-1)^n x^n\right\} + ... =$$

$$= 1 - E\{x\} + E\{x^2\} + ... + (-1)^n E\{x^n\} + ... \quad (1.33)$$

Заметим, что для $M >> 1$ и j, соответствующему каналу с сигналом, распределение величины x можно аппроксимировать гауссовским. Причем

$$m_x = E\{x\} = \sum_{m\neq j}^{M}\frac{P_m(n)}{P_j(n)}E\left\{\frac{\lambda\left(x_m(n+1)\right)}{\lambda\left(x_j(n+1)\right)}\right\}. \quad (1.34)$$

Так как величины в каналах без сигнала независимы и одинаково распределены, то среднее значение

$$E\left\{\frac{\lambda\left(x_m(n+1)\right)}{\lambda\left(x_j(n+1)\right)}\right\} = m_\lambda \quad (1.35)$$

не зависит от номера канала.

Учитывая, что

$$P_j(n)+\sum_{m\neq j}^{M}P_m(n)=1,\ P_m(n)\geq 0, \qquad (1.36)$$

из (1.32) получим

$$m_x=\frac{m_\lambda\left(1-P_j(n)\right)}{P_j(n)}\ . \qquad (1.37)$$

Аналогично из (1.32) следует, что дисперсия величины x

$$D(x)=\sum_{m\neq j}^{M}\frac{P_m^2(n)}{P_j^2(n)}D\left\{\frac{\lambda\left(x_m(n+1)\right)}{\lambda\left(x_j(n+1)\right)}\right\}=$$

$$\sigma_x^2=\sigma_\lambda^2\sum_{m\neq j}^{M}\frac{P_m^2(n)}{P_j^2(n)}\ , \qquad (1.38)$$

где $\sigma_\lambda^2=D\left\{\lambda\left(x_m(n+1)\right)\Big/\lambda\left(x_j(n+1)\right)\right\}$.

Моменты более высокого порядка ($k\geq 2$) для гауссовской аппроксимации могут быть определены по рекуррентной формуле [4]

$$E\{x^n\}=m_xE\{x^{n-1}\}+(n-1)\sigma_x^2E\{x^{n-2}\}. \qquad (1.39)$$

Можно показать, что сумма квадратов вероятностей в (1.38) при ограничениях (1.36) удовлетворяет неравенству

$$\frac{\left(1-P_j(n)\right)^2}{M-1}\leq\sum_{m\neq j}^{M}P_m^2(n)\leq\left(1-P_j(n)\right)^2, \qquad (1.40)$$

причем максимум достигается в вершинах симплекса (1.36), а минимум – в центре при $P_m(n)=P_k(n)$, ($k\neq m\neq j$). В рассматриваемом случае суммируются вероятности, соответствующие каналам без сигнала, где они приблизительно одинаковы. Поэтому можно воспользоваться аппроксимацией, использующей нижнюю границу в (1.40), из чего следует, что

$$\sigma_x^2=\sigma_\lambda^2\left\{\frac{1-P_j(n)}{P_j(n)}\right\}^2. \qquad (1.41)$$

Таким образом, после подстановки (1.33) в (1.29) с учетом выражений для моментов получим в замкнутом виде правило остановки последовательной процедуры. При этом правило остановки зависит от вероятности $P_i(n)$ и сводится к проверке условия пересечения искомой вероятностью пороговой кривой. Данная кривая определяется рядом факторов, таких как вид обработки, отношение сигнал-шум, число членов в разложении (1.33). Четное число членов обеспечивает оценку $E\left\{P_j(n+1)\right\}$ с избытком, а нечетное – с недостатком. Рассмотрим частные случаи.

1. *Когерентная обработка.* При когерентной обработке, как это следует из ([1], (3.3)), частное отношение правдоподобия имеет вид

$$Y=\lambda\left(x_m(n+1)\right)\Big/\lambda\left(x_j(n+1)\right)=$$

$$=e^{A\left(x_m(n+1)-x_j(n+1)\right)}, \qquad (1.42)$$

где величины $x_m(n+1)$ характеризуют отклик в каналах без сигнала, а $x_j(n+1)$ – в канале с сигналом. Величину Y в (1.42) можно представить в виде

$$Y=e^X\ , \qquad (1.43)$$

где X – нормально распределенная величина с параметрами

$$m_x=\mathrm{E}\left\{A\left(x_m(n+1)\right)-\left(x_j(n+1)\right)\right\}=-2A^2q_1^2, \qquad (1.44)$$

$$\sigma_x^2=D\left\{A\left(x_m(n+1)\right)-\left(x_j(n+1)\right)\right\}=$$

$$=2\sigma^2A^2=4A^2q_1^2. \qquad (1.45)$$

Известно [4], что моменты логонормальной величины Y выражаются через параметры гауссовской величины X следующим образом:

$$E\left\{Y^k\right\}=e^{\frac{k\sigma_x^2}{2}+km_x}. \qquad (1.46)$$

Поэтому

$$m_\lambda=m_y=e^{2A^2q_1^2-2A^2q_1^2}=1, \qquad (1.47)$$

$$\sigma_\lambda^2+m_\lambda^2=E\left\{Y^2\right\}=e^{2\sigma_x^2+2m_x}=$$

$$=e^{8A^2q_1^2-4A^2q_1^2}=e^{4A^2q_1^2}. \qquad (1.48)$$

2. *Некогерентная обработка*. При некогерентной обработке величина

$$Y=\lambda\left(x_m(n+1)\right)\Big/\lambda\left(x_j(n+1)\right)=$$

$$=e^{\ln\lambda\left(x_m(n+1)\right)-\ln\lambda\left(x_j(n+1)\right)}=$$

$$= e^{\ln I_0(Ax_m(n+1)) - \ln I_0(Ax_j(n+1))}. \quad (1.49)$$

Учитывая, что для слабых сигналов

$$\ln I_0(Ax) \approx \frac{A^2x^2}{4}, \quad (1.50)$$

(1.49) преобразуется к виду

$$Y = e^{\frac{A^2}{4}\left\{x_m^2(n+1) - x_j^2(n+1)\right\}}, \quad (1.51)$$

нормированная величина $\frac{x_m^2(n+1)}{\sigma^2}$ имеет центральное χ^2 – распределение с двумя степенями свободы, а $\frac{x_j^2(n+1)}{\sigma^2}$ – нецентральное χ^2 – распределение с параметром нецентральности $\lambda = 2A^2q_1^2$. Или после линеаризации экспоненты в (1.51) получим

$$Y = 1 + C\left(V_m - V_j\right), \quad (1.52)$$

где

$$C = \frac{A^2\sigma^2}{4} = \frac{\lambda}{4};\ V_m = \frac{x_m^2(n+1)}{\sigma^2};$$

$$V_j = \frac{x_j^2(n+1)}{\sigma^2}. \quad (1.53)$$

Из (1.52) легко определяются необходимые первые два момента случайной величины Y.

$$m_\lambda = E\{Y\} = 1 + C\left\{E\{V_m\} - E\{V_j\}\right\}, \quad (1.54)$$

$$E\{Y^2\} = D(Y) + E^2\{Y\}, \quad (1.55)$$

$$\sigma_\lambda^2 = D(Y) = C^2\left\{D(V_m) + D(V_j)\right\}. \quad (1.56)$$

Учитывая, что [4]

$$E\left\{\chi^2(n,\lambda)\right\} = n + \lambda, \quad (1.57)$$

$$D\left\{\chi^2(n,\lambda)\right\} = 2n + 4\lambda, \quad (1.58)$$

из (1.54)-(1.57) получим

$$m_\lambda = 1 - C\lambda = 1 - \frac{\lambda^2}{4},\ \left(\frac{\lambda^2}{4} < 1\right), \quad (1.59)$$

$$\sigma_\lambda^2 = \frac{\lambda^2}{16}\{8 + 4\lambda\} = \frac{\lambda^2}{4}(2 + \lambda), \quad (1.60)$$

$$m_\lambda^2 + \sigma_\lambda^2 = \left(1 - \frac{\lambda^2}{4}\right)^2 + \frac{\lambda^2}{4}(2 + \lambda) =$$

$$= 1 + \frac{\lambda^3}{4} + \frac{\lambda^4}{16} = 1 + 2\left(A^2q_1^2\right)^3 + \left(A^2q_1^2\right)^4. \quad (1.61)$$

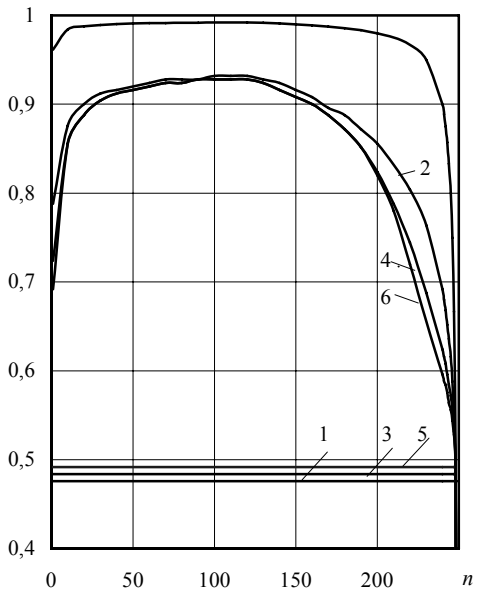


Рис.1. Оценки сверху и снизу для пороговой кривой при некогерентной обработке и асинхронном режиме подавления

На рис.1 приведены обусловленные усечением ряда (1.39) оценки сверху и снизу для пороговой кривой. Приведенные графики соответствуют асинхронному режиму и некогерентной обработке при $h = 9$, $M = 10$. Цифрой на графике обозначено число членов в ряде (1.33). Из вида кривых следует, что знакочередующийся ряд (1.33) медленно сходится и получение приемлемой оценки для пороговой кривой связано с определенными вычислительными трудностями. Поэтому рассмотрим второе, более простое, правило.

Второе правило квазиоптимальной остановки основано на анализе вероятностно-временных характеристик режима "обнаружение- подавление" при использовании фиксированного времени на обнаружение. Как показано в [2,3], в этом случае существуют оптимальные времена t_1^* для синхронного и t_2^* для асинхронного режимов, при которых средние времена накрытия скачка частоты ответной помехой максимальны. Максимумы среднего времени накрытия достигаются на веро-

ятностях $P_1^* = P_{\text{об}}\left(t_1^*\right)$ и $P_2^* = P_{\text{об}}\left(t_2^*\right)$ в синхронном и асинхронном режимах соответственно. В [2,3] приведены алгоритмы расчета указанных величин для различных видов обработки, отношения сигнал-шум, числа каналов и др.

При данном подходе в качестве квазиоптимального времени остановки последовательной процедуры можно выбрать момент первого пересечения максимальной апостериорной вероятностью пороговых уровней, равных P_1^* для синхронного режима и P_2^* для асинхронного.

Среднее время до остановки. Если обозначить через N_A момент первого пересечения максимальной апостериорной вероятностью постоянного порогового уровня, равного $1/(1+A)$, где A – некоторая константа, то в асимптотике при $A \to 0$ имеет место приближенная формула для среднего числа наблюдений [5]

$$E\{N_A\} \approx -\frac{\ln A}{D(f_1, f_0)}, \qquad (1.62)$$

где $D(f_1, f_0)$ – расстояние Кульбака-Лейблера между распределениями f_1 и f_0, которое определяется следующим образом:

$$D(f_1, f_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \ln\frac{f_1(x)}{f_0(x)} f_1(x)\, dx. \qquad (1.63)$$

При когерентной обработке f_1 и f_0 определяется согласно ([1], (3.2), (3.1)). Из вида плотностей следует, что

$$\ln\frac{f_1(x)}{f_0(x)} = \frac{xm}{\sigma^2} - \frac{m^2}{2\sigma^2}. \qquad (1.64)$$

После усреднения (1.64) по распределению $f_1(x)$ получим

$$D(f_1, f_0) = \frac{m^2}{2\sigma^2} = q_1^2. \qquad (1.65)$$

Окончательно выражение для среднего числа наблюдений принимает вид

$$E\{N_A\} = -\frac{\ln A}{q_1^2}. \qquad (1.66)$$

2. Результаты численных расчетов и имитационного моделирования

Описание численного эксперимента. Для оценки работоспособности последовательной процедуры и сравнения её эффективности с процедурой на основе выборки фиксированного объема проведено имитационное моделирование. Опишем подробно случай когерентного различения сигналов. Предполагается, что сигнал присутствует только в одном k-м канале (для определенности положим $k = 1$), а в остальных каналах присутствует только гауссовский шум. Длительность скачка частоты T_h (для определенности $T_h = 1$) разбивается на N временных отсчетов, длительности $\Delta t = T_h / N$. Через интервал времени Δt генерируются статистики на выходах многоканальной системы, которые в i-й момент образуют случайный вектор

$$X(i) = \{x_1(i), x_2(i), ..., x_M(i)\},\ i = 1,...N.$$

Компоненты вектора являются независимыми гауссовскими величинами с параметрами

$$E\{x_m(n)\} = 0 \text{ для } m \neq k,\ E\{x_k(n)\} = 2q_1^2, \quad (2.1)$$

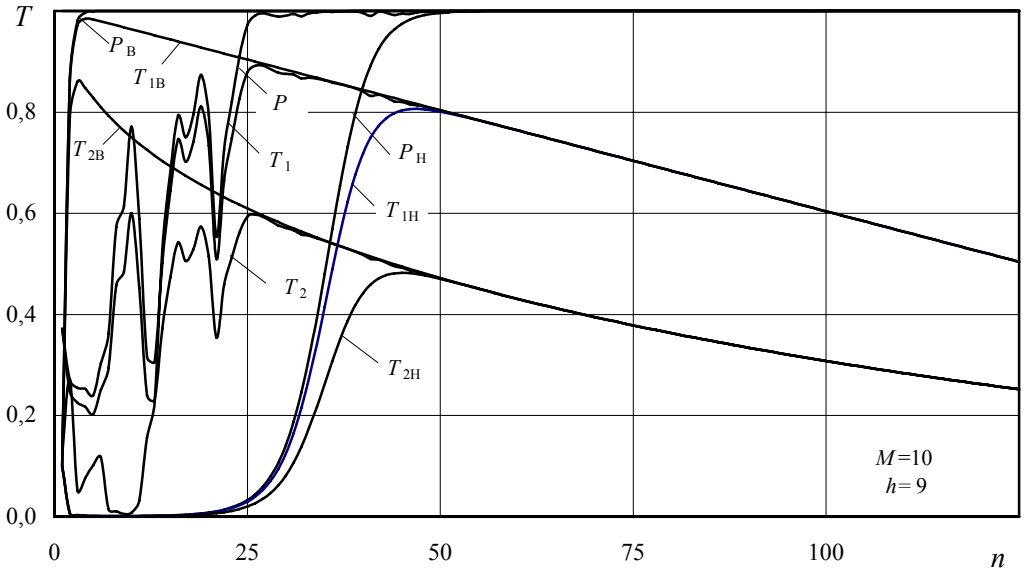
и одинаковыми дисперсиями

$$\sigma^2 = D\{x_j(i)\} = 2q_1^2, \qquad (2.2)$$

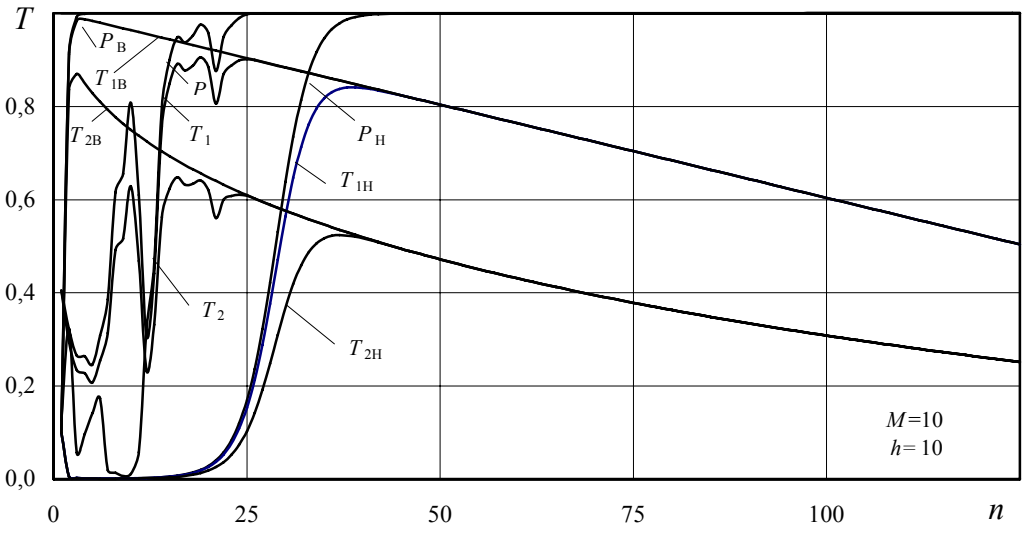
где, как и ранее, $q_1^2 = h^2 w \Delta t$ – отношение сигнал-шум, w – ширина полосы канала (для определенности $w = 1$), h^2 – отношение сигнал-шум по мощности. В соответствии с формулой ([1], (3.5)) рекуррентно пересчитываются апостериорные вероятности, на каждом шаге выбирается максимум и номер максимума запоминается. Начальное распределение сигнала по каналам предполагается равномерным, т.е. $P_j(0) = \pi_j = \frac{1}{M}$. Последовательная процедура продолжается до тех пор, пока не выполнится условие останова. Данное условие сводится к проверке пересечения постоянного порога максимальной апостериорной вероятностью.

В качестве иллюстраций для когерентной обработки на рис.2а,б приведены результаты моделирования и численных расчетов зависимостей от числа итераций n апостериорных вероятностей, границ для апостериорных вероятностей и времен накрытия для синхронного и асинхронного режимов подавления при $M = 10$; $T_h = 1$, $N = 250$, $h = 9$ (рис.2а) и $h = 10$ (рис.2б). На рисунках обозначены P_B, P_H, T_{1B}, T_{2B}, T_{1H}, T_{2H} – верхняя и нижняя границы для времен накрытия в синхронном (с индексом 1) и асинхронном (с индексом 2) режимах подавления. Между границами заключены результаты статистического моделирования.

Кривая, обозначенная через P, соответствует апостериорной вероятности, T_1 и T_2 – соответствующие ей времена накрытия для синхронного и асинхронного режимов. Следует заметить, что на всех представленных рисунках временной аргумент изменяется до половины временного интервала T_h, т.е. $n = 125$ соответствует $T_h/2$.



а)



б)

Рис.2. Зависимости вероятностей и среднего времени накрытия от числа итераций при $h = 9$ (а) и при $h = 10$ (б)

Эффективность последовательной процедуры сравнивается с процедурой фиксированной выборки. При этом следует учитывать, что объем выборки последовательной процедуры является

случайной величиной, параметры распределения которой зависят от отношения сигнал-шум. Поэтому обе процедуры сравниваются при одинаковом отношении сигнал-шум q_1^2 и одинаковых вероятностях ошибок первого и второго рода (α,β). Широкое распространение получили два критерия, характеризующие выигрыш во времени или мощности [6]. Первым критерием является средняя относительная экономия, которая определяется следующим образом:

$$S\left(q_1^2\right) = 100\left[1 - \frac{\overline{n}\left(q_1^2\right)}{n_1}\right]\%,$$

где n_1 – объем фиксированной выборки, $\overline{n}\left(q_1^2\right)$ – средний объем выборки последовательной процедуры. Другим критерием является экономия в мощности обнаруживаемого сигнала. В этом случае требуется, чтобы вероятности (α,β) были одинаковыми, и $n_1 = \overline{n}\left(q_1^2\right)$, а сравниваются отношения сигнал-шум по мощности h_S^2 и h_F^2 для последовательной процедуры и с фиксированной выборкой соответственно.

Экономия в мощности определяется следующим образом:

$$S = 100\left[1 - \frac{h_S^2}{h_F^2}\right]\%.$$

В рассматриваемом нами случае, наряду с перечисленными критериями, требуется оценивать эффективность по среднему времени накрытия. Во всех перечисленных критериях необходимо определять средний объем выборки последовательной процедуры. Ниже приведем результаты, полученные теоретически при когерентной обработке в соответствии с асимптотической формулой (1.66) и путем имитационного моделирования. Поскольку пороговые кривые, заключенные между нижней и верхней границей для апостериорных вероятностей, изменяются в пределах между нижним и верхним значениями, которые обозначим через P_H и P_B, то в соответствии с формулой (1.66) можно получить только границы $\overline{N}_{\text{Н}}$, $\overline{N}_{\text{В}}$ для среднего объема выборки. Данные результаты приведены в табл.1,2. В них также представлена средняя вероятность $\overline{P}$ и средний объем $\overline{N}$, полученные статистическим моделированием.

Таблица 1

$h = 9$, $M = 10$	P_H	P_B	$\overline{N}_H$	$\overline{N}_B$	$\overline{P}$	$\overline{N}$
Синхронный режим	0,992	0,993	14,9	15,3	0,996	16,18
Асинхронный режим	0,973	0,985	11,06	12,9	0,985	13,38

Таблица 2

$h = 10$, $M = 10$	P_H	P_B	$\overline{N}_H$	$\overline{N}_B$	$\overline{P}$	$\overline{N}$
Синхронный режим	0,994	0,995	12,8	13,2	0,997	13,34
Асинхронный режим	0,978	0,988	9,49	11,03	0,988	11,16

Из анализа таблиц следует, что результаты, полученные теоретически по асимптотическим формулам и методом статистического моделирования, близки. Однако при статистическом моделировании наблюдается систематическое смещение в сторону увеличения вероятностей и среднего объема выборки. Это объясняется ошибками, возникающими в результате “перескока” апостериорной вероятностью пороговой кривой.

По аналогии с первыми двумя критериями введем коэффициент выигрыша последовательной процедуры для среднего времени накрытия

$$k_i = 100\left[\frac{\overline{T}_{iS} - \overline{T}_{iF}}{\overline{T}_{iF}}\right]\%,\ i = 1,2,$$

где $\overline{T}_{iS}$ и $\overline{T}_{iF}$ – средние времена накрытия, в которых индекс «1» соответствует синхронному режиму, «2» – асинхронному, S – последовательной процедуре, F – процедуре фиксированного объема. Данные для сравнения процедур при когерентной обработке приведены в табл.3 (для синхронного режима) и табл.4 (для асинхронного режима), где результаты последовательной процедуры усреднялись по 100 реализациям. В качестве правила остановки выбиралось второе квазиоптимальное правило, т.е. пересечение апостериорной вероятностью постоянного порога, равного вероятности, соответствующей максимуму среднего времени накрытия для выборки фиксированного объема.

Для случая некогерентной обработки с зависимыми отсчетами результаты приведены в табл.5 и 6. Аналогичные зависимости для энергетического различения (некогерентная обработка с независимыми отсчетами) приведены в табл.7 и 8.

Таблица 3

	$\overline{N}_S$	$\overline{N}_F$	$\overline{P}_S$	$\overline{P}_F$	$\overline{T}_S$	$\overline{T}_F$	k
$h = 5$, $M = 10$	37,9	47	0,935	0,912	0,797	0,740	7,7%
$h = 7$, $M = 10$	21,9	31	0,972	0,956	0,890	0,837	6,3%
$h = 9$, $M = 10$	14,1	22	0,984	0,973	0,932	0,888	4,95%
$h = 10$, $M = 10$	12,2	19	0,988	0,979	0,944	0,905	4,3%
$h = 9$, $M = 100$	25	32	0,981	0,969	0,886	0,845	4,9%
$h = 10$, $M = 100$	20,8	27	0,984	0,974	0,906	0,869	4,3%

Таблица 4

	$\overline{N}_S$	$\overline{N}_F$	$\overline{P}_S$	$\overline{P}_F$	$\overline{T}_S$	$\overline{T}_F$	k
$h = 5$, $M = 10$	31,9	33	0,866	0,823	0,508	0,455	11,6%
$h = 7$, $M = 10$	18,3	22	0,925	0,893	0,625	0,558	12%
$h = 9$, $M = 10$	11,8	15	0,950	0,918	0,702	0,628	11,8%
$h = 10$, $M = 10$	9,7	13	0,962	0,931	0,735	0,655	12,2%
$h = 9$, $M = 100$	22.7	25	0,955	0,918	0,611	0,553	10,5%
$h = 10$, $M = 100$	18,3	21	0,956	0,928	0,646	0,586	10,2%

Таблица 5

	$\overline{N}_S$	$\overline{N}_F$	$\overline{P}_S$	$\overline{P}_F$	$\overline{T}_S$	$\overline{T}_F$	k
$h = 5$, $M = 10$	56,3	60	0,928	0,874	0,714	0,668	6,9%
$h = 7$, $M = 10$	30,9	40	0,961	0,944	0,846	0,793	6,7%
$h = 9$, $M = 10$	20,9	28	0,980	0,967	0,902	0,859	5%
$h = 10$, $M = 10$	17,8	24	0,988	0,978	0,922	0,881	4,65%
$h = 9$, $M = 100$	29,8	37	0,973	0,955	0,801	0,814	5,76%
$h = 10$, $M = 100$	26,5	33	0,988	0,976	0,887	0,844	5,1%

Таблица 6

	$\overline{N}_S$	$\overline{N}_F$	$\overline{P}_S$	$\overline{P}_F$	$\overline{T}_S$	$\overline{T}_F$	k
$h = 5$, $M = 10$	55	47	0,927	0,798	0,430	0,384	12%
$h = 7$, $M = 10$	27,8	31	0,919	0,883	0,553	0,498	11%
$h = 9$, $M = 10$	17,9	20	0,940	0,901	0,635	0,577	10%
$h = 10$, $M = 10$	15,8	18	0,959	0,927	0,668	0,608	9,9%
$h = 9$, $M = 100$	28,3	32	0,950	0,917	0,567	0,512	10,7%
$h = 10$, $M = 100$	23,5	27	0,959	0,929	0,604	0,540	10,2%

Таблица 7

	$\overline{N}_S$	$\overline{N}_F$	$\overline{P}_S$	$\overline{P}_F$	$\overline{T}_S$	$\overline{T}_F$	k
$h = 7$, $M = 10$	72,8	81	0,601	0,560	0,429	0,379	13,2%
$h = 9$, $M = 10$	53,5	68	0,815	0,781	0,644	0,568	13,4%
$h = 10$, $M = 10$	45,3	54	0,873	0,766	0,719	0,643	11,8%
$h = 9$, $M = 100$	77,6	104	0,713	0,669	0,446	0,391	14%
$h = 10$, $M = 100$	65,5	90	0,823	0,776	0,585	0,497	17,7%

Таблица 8

	$\overline{N}_S$	$\overline{N}_F$	$\overline{P}_S$	$\overline{P}_F$	$\overline{T}_S$	$\overline{T}_F$	k
$h = 7$, $M = 10$	66,3	54	0,503	0,460	0,219	0,207	5,8%
$h = 9$, $M = 10$	46,3	47	0,728	0,671	0,375	0,323	16%
$h = 10$, $M = 10$	41	44	0,795	0,731	0,428	0,376	13,8%
$h = 9$, $M = 100$	74,6	94	0,667	0,621	0,236	0,199	19%
$h = 10$, $M = 100$	62,3	78	0,765	0,712	0,319	0,261	21,8%

Как следует из табл.3-6 для когерентной и некогерентной обработки с зависимыми наблюдениями при $M = 10$ и $h = 5 \div 10$ выигрыш последовательной процедуры у процедуры с выборкой фиксированного объема составляет в среднем 4,5÷7,5% в синхронном режиме и 10÷12% – в асинхронном. При этом коэффициент выигрыша увеличивается с уменьшением отношения сигнал-шум и практически не изменяется при увеличении числа каналов. При некогерентной обработке с независимыми испытаниями (энергетическое различение) выигрыш составляет 11,5÷13,5% в синхронном режиме и 14÷16% в асинхронном. Следует заметить, что применяемое второе правило квазиоптимальной остановки, основанное на пересечении максимальной апостериорной вероятностью постоянной пороговой кривой, в ряде случаев (особенно при малых значениях отношения сигнал-шум для энергетического различения) теряет эффективность. Это объясняется тем, что имеются выборочные траектории апостериорной вероятности, которые достигают границу частотного элемента раньше, чем пороговую кривую. Поэтому данное правило нуждается в "усечении" (например, принимать решение через интервал, равный половине длительности частотного элемента).

Таким образом, рассмотренная последовательная процедура различения сигналов с оптимальным правилом остановки по сравнению с процедурой фиксированного объема обладает определенными преимуществами.

1. Данная процедура дает алгоритм определения оптимального времени остановки, соответствующего максимуму среднего времени накрытия. Алгоритм легко может быть реализован в устройстве.

2. Выигрыш по среднему времени в оптимальном режиме составляет около 7,5% для синхронного и около 12% для асинхронного режимов подавления.

3. Оптимальное правило остановки сводится к проверке условия пересечения пороговой кривой апостериорной вероятностью. Как показано в [4], такие последовательные процедуры являются асимптотически оптимальными, т.е. практически не улучшаемыми.

Литература

1. *Борисов В.И.* Последовательный алгоритм определения частотного элемента сигнала с ППРЧ. Ч. 1. Критерий оптимальности и методы решения / В.И. Борисов, В.М. Зинчук, А.Е. Лимарев, А.В. Немчилов // Теория и техника радиосвязи : науч.-техн. сб. / ОАО «Концерн «Созвездие». – Воронеж, 2006. – Вып. 2. – С. 5–15.

2. *Немчилов А.В.* Оптимизация вероятностно-временных характеристик режима "обнаружение-подавление" сигналов с ППРЧ. Ч. 1. Построение математической модели / А.В. Немчилов, В.М. Зинчук, А.Е. Лимарев // Теория и техника радиосвязи : науч.-техн. сб. / ВНИИС. – Воронеж, 2005. – Вып. 1. – С. 5–19.

3. *Зинчук В.М.* Оптимизация вероятностно-временных характеристик режима "подавление-обнаружение" сигналов с ППРЧ. Ч. 2. Оптимизация параметров при различных видах обработки / В.М. Зинчук, А.В. Немчилов, А.Е. Лимарев, Ю.Н. Максюта // Теория и техника радиосвязи : науч.-техн.сб. / ВНИИС. – Воронеж, 2005. – Вып. 1. – С. 19–44.

4. *Королюк В.С.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике / В.С. Королюк, Н.И. Портенко А.В. Скороход, А.Ф. Турбин. – М. : Наука, 1985. – 640с.

5. *Veeravalli V.V., Baum C.W.* Asymptotic Efficiency of a Sequential Multihypothesis Test. // IEEE Trans. – 1995. – Vol. IT-41, № 6, November. – Pp. 1994–1996.

6. *Бусганг Дж.* Оптимальное последовательное обнаружение сигналов в шуме. В сб. : Прием сигналов при наличии шума : пер. с англ. / Бусганг Дж., Мидлтон Д. ; под ред. Л.С. Гуткина. – М. : Иностр. лит-ра, 1960. – 344с.

Получено 03.07.06г.

УДК 621.396.1

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ОЦЕНКА КАЧЕСТВА СЛОЖНЫХ СИСТЕМ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ И СРЕДСТВ СВЯЗИ МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СОВОКУПНОСТИ НЕСОПОСТАВИМЫХ КРИТЕРИЕВ

В.В. МАЙОРОВ

Предлагается алгоритм выполнения многокритериальной оценки качества функционирования сложных систем и средств связи без построения интегрального критерия в аналитическом виде с частично нечёткой постановкой задачи.

Важной задачей проектирования любых сложных систем, да и средств связи является оптимизация проектного решения, которая предполагает решение задачи дискретного выбора объекта. Эта задача заключается в выборе оптимальной системы из конечного числа определённых вариантов. В процессе выбора варианта сложной системы приходится учитывать значительное количество разнородных требований, предъявляемых к этой системе, т.к., согласно принятым взглядам на оценку качества сложных систем, комплексную оценку качества системы можно осуществить только с помощью множества показателей (критериев) [1-4], отражающих все существенные свойства этой системы. Например, в [4] для оценки системы передачи информации используется 21 частный критерий. При этом такое множество критериев ещё не позволяет оценить систему на всех этапах её жизненного цикла. Оно не охватывает этапы ремонта, модернизации и утилизации её подсистем.

В совокупности подобных критериев могут встречаться как согласованные между собой показатели качества, так и несопоставимые [1, 2]. При этом бывают ситуации [1], когда выбранное множество критериев противоречиво.

Преобразование многокритериальной задачи оценки в однокритериальную упрощает процесс выбора объекта из имеющейся совокупности, но приводит к некоторой произвольности, не имеющей строгой физической обоснованности [3], т.к. существует не один единственный, а несколько способов свертки набора разнородных частных критериев в один, называемый интегральным [1, 2], главным [3], или обобщенным [5].

Даже существует мнение [2], что процесс свертки множества разнородных критериев в один интегральный при наличии противоречивости отдельных частных критериев приводит к неоправданному упрощению задачи и к решению задачи, неадекватной исходной задаче.

Стремление избежать подобных ситуаций привело к разработке алгоритмов выбора предпочтительного варианта, основанных на логических рассуждениях. Они представляют собой итеративную последовательность формализованных или неформализованных процедур последовательного принятия решений по каждому из множества частных критериев оценки.

Подобные многоступенчатые процедуры оценивания наиболее удобны для практического использования, т.к. они позволяют последовательно наращивать множество учитываемых частных критериев, постепенно включая в него показатели, характеризующие систему на всех этапах её жизненного цикла.

В методе [6] оценки качества сложных систем передачи информации по последовательно применяемым частным критериям фактор последовательности в применении отдельных критериев используется в полной мере, что позволяет существенно уменьшить процедуры оценивания и упростить её алгоритм. Это достигается за счёт постепенного прореживания оцениваемого множества сложных систем. Но и этому алгоритму присущ недостаток, заключающийся в следующем.

При решении ряда практически важных задач возникает ситуация, когда существующие средства измерений не обеспечивают требуемой информации, либо в наличии имеется лишь качественная информация о системе. В таких случаях необходимо иметь алгоритм, который позволяет на основе обработки чёткой и нечёткой информации о системе получить необходимую оценку. Алгоритм [6] не позволяет этого сделать.

Предлагаемый метод предполагает отказ от аналитического принципа построения интегрального критерия из имеющейся совокупности частных критериев и переход к алгоритмическо-

му принципу получения такого критерия без определения формы обобщения совокупности частных нечётких критериев и конкретного аналитического выражения, которое свёртывает совокупность частных критериев в эквивалентный им интегральный критерий.

С позиций формальной логики вся процедура оценивания в предлагаемом методе заключается в выполнении *n*-кратного повторения операции последовательного дихотомического деления объёма множества *S* возможных вариантов сложных систем. Этот процесс на каждой ступени дихотомического деления обеспечивает прореживание множества *S* и имеет следующий вид.

Пусть заданное множество систем $S = \{s_i\}$, $i = 1,2,\ldots,r$, необходимо оценить по множеству критериев $K = \{k_i\}$, $j = 1,2,\ldots,n$. При этом ставится типовая задача системотехники [1]: выбрать один или несколько вариантов $s_i \in S$, $i = 1,2,\ldots,r$, являющихся наиболее предпочтительными или равноценными по множеству *K*. Оценка множества *S* выполняется в виде *n*-ступенчатой процедуры по всем критериям, начиная с наиболее важного критерия в $\{k_i\}$.

При такой постановке задачи будем считать, что относительная важность критериев может быть определена однозначно и задаётся путём предварительного ранжирования критериев по степени их важности для лиц, принимающих решение (ЛПР), например, по методу [7]. В результате этой операции все критерии могут быть для удобства дальнейшего изложения пронумерованы таким образом, что

$$k_i \succ k_j;\ j > i;\ i,j \in \{1,2,\ldots,n\};$$

$$i=1,2,\ldots,(n-1);\ j=2,3,\ldots,n, \qquad (1)$$

где $\succ$ – символ предпочтительности или доминирования.

Все нечёткие критериальные ограничения предполагаются однозначно определимыми для ЛПР и могут быть заданы системой неравенств вида [8]

$$\eta'_{i\,\min} \le \eta(k_i^*, k_i) =$$

$$= \sup_{z,y \in Y} \min\{k_i, k_i^*, \mu_R(y,z)\} \le \eta'_{i\,\max},$$

$$\eta''_{i\,\min} \le \eta(k_i, k_i^*) =$$

$$= \sup_{z,y \in Y} \min\{k_i^*, k_i, \mu_R(z,y)\} \le \eta''_{i\,\max}, \qquad (2)$$

в пространстве параметров k^* оцениваемых систем, где

$\mu_R(y,z)$ описывает нечёткое отношение предпочтения *R*, такого, что *yRz*,

$\mu_R(z,y)$ описывает нечёткое отношение предпочтения *R*, такого, что *zRy*,

$\eta(k_i, k_i^*)$ – степень предпочтения $k_i^* \succ k_i$ [8].

На рис.1 наглядно показано, как графическим методом находится величина степени предпочтения $\eta(k_i, k_i^*)$.

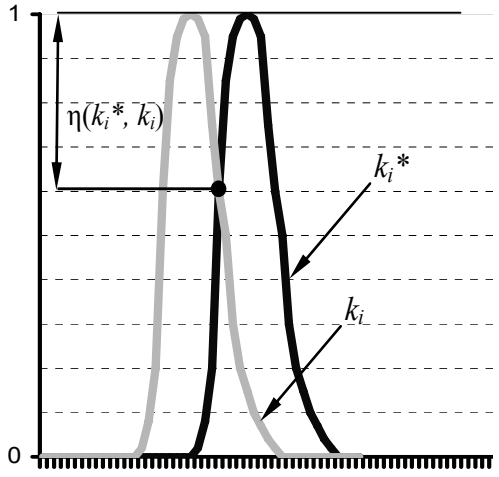


Рис.1. Сравнение двух нечетких показателей

Все чёткие критериальные ограничения предполагаются однозначно заданными системой неравенств вида

$$k_{i\min} \le k_i \le k_{i\max}. \qquad (3)$$

После завершения этих двух предварительных операций все системы оцениваются по критерию $k_1 \in K$. В результате этого относительно каждой из систем выносится дихотомическое суждение, приводящее к образованию двух новых множеств $S_{1,1}$ и $S_{1,2}$ таких, что $S_{1,1} \cup S_{1,2} = S$, $S_{1,1} \cap S_{1,2} = \varnothing$. Деление систем $\{si\}$, $i = 1,2,\ldots,r$, выполняется по принципу

$$s_i \in S_{1,1}, \text{ если } s_i \text{ удовлетворяет } k_1, \qquad (4)$$

$$s_i \in S_{1,2}, \text{ если } s_i \text{ не удовлетворяет } k_1. \qquad (5)$$

После этого проверяется содержимое множества $S_{1,1}$. Если обнаруживается, что $S_{1,1} = \varnothing$ задача оценивания оказывается неразрешимой, т.к. согласно выражению (1) все системы не

удовлетворяют самому приоритетному критерию $k_1 \in K$. В этом случае дальнейшее оценивание по k_j, j =2,3,…,n, теряет практический смысл или требует предварительной коррекции значений $\eta'_{1\min}, \eta''_{1\min}, \eta'_{1\max}, \eta''_{1\max}$, если критерий k_1 нечёткий и $k_{1\min}$, $k_{1\max}$, k_1, если критерий k_1 чёткий. После такой коррекции производится повторная операция оценивания систем по критерию k_1. Эта процедура может многократно повторяться до тех пор, пока проверка содержимого множества $S_{1,1}$ не покажет, что $S_{1,1}\neq\varnothing$.

Если $S_{1,1}\neq\varnothing$, то $\forall s_i \in S_{1,2} \subset S$, $i \in \{1, 2,\ldots,r\}$, исключаются из участия в процедуре оценивания на последующих ступенях процесса, а $\forall s_i \in S_{1,1} \subset S$, $i \in \{1,2,\ldots,r\}$, заново перенумеровываются индексами i=1,2,…, a_1, где $a_1 \leq r$. На этом первая ступень процедуры оценивания заканчивается.

Вторая ступень процедуры по своему содержанию повторяет первую ступень, но при ней объектом оценивания являются $\forall s_i \in \mathrm{S}_{1,1} \subset \mathrm{S}$, i=1,2,…,a_1, а само оценивание выполняется по критерию $k_2 \in K$. В результате этого множество $S_{1,1} \subset S$ делится на подмножества $S_{2,1}$, $S_{2,2}$ по принципам, аналогичным (4) и (5).

Каждая последующая (t-я, t=3,4,...,n) ступень процедуры по содержанию полностью аналогичная (t–1)-й ступени. Отличие заключается только в том, что она выполняется над множеством $S_{t\text{-}1}, \subset 1\, S_{t\text{-}2,1}$ с помощью критерия $k_t \in K$. Постоянное исключение подмножества $S_{t,2}$, t=1,2,…,(n-1), из участия в процедуре оценивания на (t+1)-й ступени процесса обеспечивает процесс поступенчатого прореживания множества $S=\{s_i\}$, i=1,2,…,r, и проводит к тому, что $a_{t-1} \leq a_t$, t=2, 3,…,(n-1).

В конце каждой t-й ступени, t=2,3,…, $(n-1)$, процедуры оценивания, как и после первой ступени, выполняется проверка содержимого подмножества $S_{t,1}$. Если при этом обнаруживается, что $S_{t,1}=\varnothing$, процедура прерывается, т.к. это означает, что критерий $k_t \in K$ не согласован с $\{k_j\}$, j=1,2,…,(t–1). Для достижения необходимого согласования надо уточнить систему критериальных ограничений (2), (3), а именно задать новые значения $\eta'_{t\min}, \eta''_{t\min}, \eta'_{t\max}, \eta''_{t\max}$ (для нечётких критериев), либо $k_{i\min}$, $k_{i\max}$ (для чётких), после чего возможен переход к (t+1) ступени процедуры оценивания, если $S_{t,1}\neq\varnothing$.

При благоприятных обстоятельствах описанная процедура продолжается до тех пор, пока на n-й ступени не будет выбран один вариант $s^* \in S$ построения анализируемой системы. Если же после использования $k_n \in K$ оказалось, что $S_{n,1}=\{s_i\}$, i=1, 2,…, a_n, это означает, что $\forall s_i \in S_{n,1}$ равноценны по $K=\{k_j\}$, j=1, 2, …, n, и образуют множество Парето для $S=\{s_i\}$, i=1, 2,…, r [3]. В этом случае ЛПР может выбрать любой вариант из $\left\{s_1, s_2, \ldots s_{a_n}\right\}$ в качестве наиболее предпочтительного, пользуясь неформальными приёмами, перечисленными, например, в [3].

Следует заметить одну отличительную черту данного алгоритма. В общем случае исключение операции ранжирования критериев из процедуры оценивания множества систем недопустимо, т.к. приводит к очень большим ошибкам [6].

Экспериментальная часть

Проведём сравнительную оценку средств радиосвязи. Для сравнительной оценки качества функционирования средств радиосвязи применим разработанный алгоритм выбора оптимального средства методом последовательного принятия решений на основе использования совокупности несопоставимых критериев.

Предположим, что нам нужно оценить следующие радиосредства: ITT Sincgars, Р-168-5УН(2), Tadiran CNR-900 и Thomson-CSF PR4G по совокупности критериев качества: 1) число доступных каналов, 2) стандартизация, 3) выходная мощность, 4) число запоминаемых частот, 5) скрытность связи, 6) защита от электромагнитного излучения ядерного взрыва (ЭМИ ЯВ), 7) эргономичность, 8) электромагнитная совместимость (ЭМС), 9) скорость ППРЧ, 10) скорость стирания ключей, 11) транспортабельность.

Значения показателей для всех средств представлены в табл.1. Количественные данные взяты из технических условий на радиостанцию Р-168-5УН(2) и [9].

Ранжирование показателей осуществлено с помощью разработанного автором метода [7]. Для этой цели привлекается группа из 6 экспертов. Коэффициент рассогласования экспертов равен 0,05, что считается [10] приемлемым.

Матрицы попарных сравнений получились следующие:

1, 2, 4, 5 эксперты

1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0
1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1

3 эксперт

1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0
1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1

6 эксперт

1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0
0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0
1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0
0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1

Таблица 1

Показатели	Значения показателей			
	ITT Sincgars	Р-168-5УН (2)	Tadiran CNR900	Thomson-CSF PR4G
Вых. мощность	4-50, 3 ступени	0,25; 3;8	0,25;4; 50	0,4; 4; 40
Количество запомин. частот	6	8	10	7
Транспортабельность	хорошая	хорошая	хорошая	хорошая
Скрытность связи	удовлет.	хорошая	удовлет.	хорошая
Скорость ППРЧ	средняя	средняя	средняя	быстрая
Стирание ключей	среднее	быстрое	быстрое	мгновен.
Защита от ЭМИ ЯВ	удовлет.	хорошая	удовлет.	отличн.
Число доступных каналов	2320	3119	2320	2320
ЭМС	удовлет.	удовлет.	удовлет.	хорошая
Стандартизация	совмест.	совмест.	совмест.	совмест.
Эргономичность	удовлет.	удовлет.	хорошая	отличная

Таблица 2

Показатели	Вес показателя	Ограничение
Вых. мощность	0,163	k>2 ступен.
Количество запомин. частот	0,149	k>6
Транспортабельность	0,134	η>0,5 рис.3.13
Скрытность связи	0,119	η>0,5 рис.3.14
Скорость ППРЧ	0,104	η>0,5 рис.3.15
Стирание ключей	0,101	η>0,5 рис.3.16
Защита от ЭМИ ЯВ	0,074	η>0,5 рис.3.17
Число доступных каналов	0,067	k>2000
ЭМС	0,045	η>0,5 рис.3.18
Стандартизация	0,030	совмест.
Эргономичность	0,015	η>0,5 рис.3.19

Результаты ранжирования представлены в табл.2. Из этой таблицы следует, что наибольшую важность среди показателей оценки средств имеет выходная мощность (стоит на первом месте), затем идет количество запоминаемых частот (второе место по важности), транспортабельность и т.д. В третьем столбце таблицы приведены критериальные ограничения, которым должно удовлетворять средство связи. Для точных количественных показателей задается условие, которому должен удовлетворять сам показатель. Для качественных показателей задается требование для функции принадлежности нечеткого множества, характеризующего показатель, в виде условия для значения степени предпочтения $\eta(k_i, k_i^*)$.

Формализация лингвистических переменных для каждого качественного показателя представлена на рис.2–8. На каждом из этих рисунков изображен график граничной функции принадлежности, по отношению к которой определяется значение степени предпочтения $\eta(k_i, k_i^*)$, а соответственно проверяется условие: удовлетворяет ли средство связи данному показателю или нет. Граничная функция принадлежности задается экспертами в данной области или заказчиком, приобретающим средство связи и предъявляющим к нему соответствующее требование по данному показателю. На рисунках также представлены графики функций принадлежности оценок экспертов по каждому качественному показателю из табл. 1.

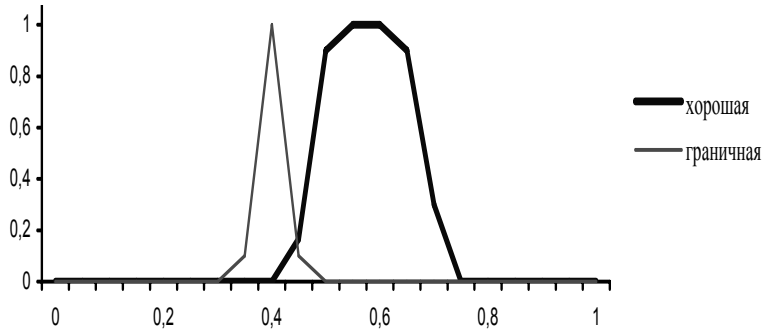


Рис.2. Транспортабельность

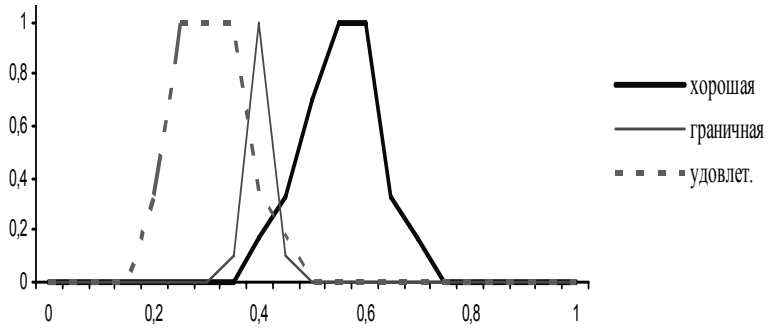


Рис.3. Скрытность связи

Скрытность связи средств оценена экспертами двумя оценками – «хорошая» и «удовлетворительная» – поэтому на рисунке представлены графики функций принадлежности трех лингвистических переменных: «хорошая», «удовлетворительная» и «граничная».

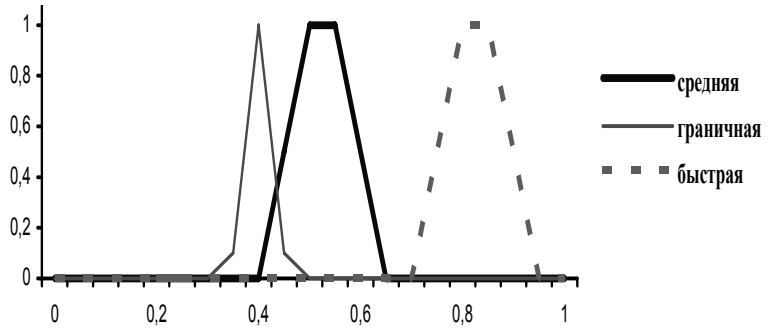


Рис. 4. Скорость ППРЧ

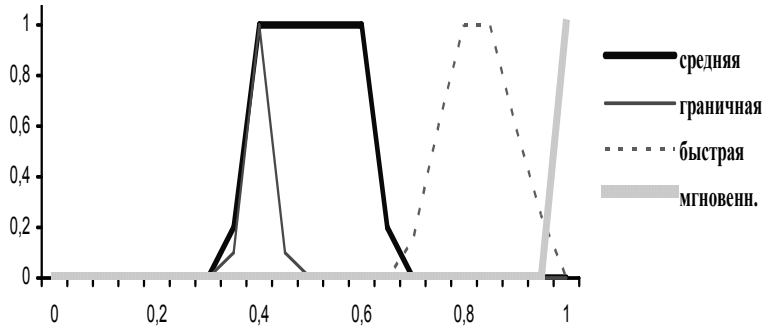


Рис. 5. Стирание ключей

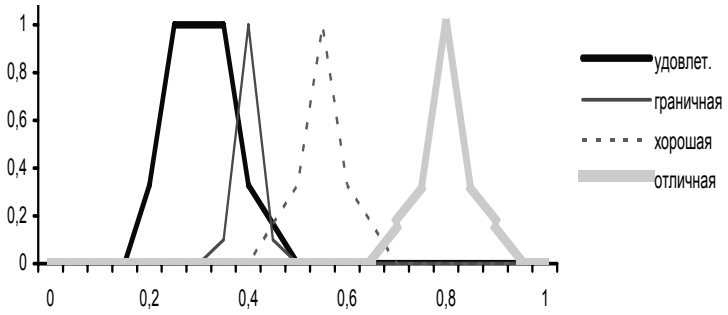


Рис. 6. Защита от ЭМИ ЯВ

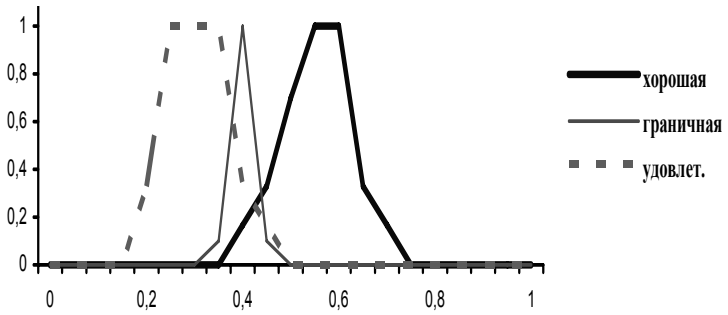


Рис.7. ЭМС

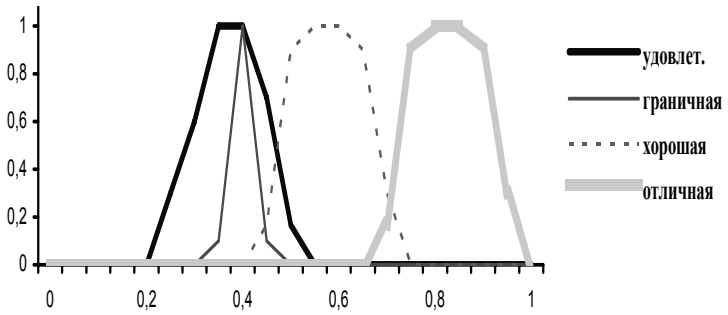


Рис.8. Эргономичность

Оценка предлагаемого множества радиосредств выполняется в виде 11-ступенчатой процедуры по всем критериям, начиная с наиболее важного критерия в $\{k_j\}$, а именно, исходя из табл.2, с критерия выходной мощности.

Критериальные ограничения четкие и нечеткие заданы табл. 2 и рис.2–8.

В результате сравнения по первому критерию относительно каждой из радиостанций выносится дихотомическое суждение, что все радиосредства удовлетворяют критерию выходной мощности.

Вторая ступень процедуры по своему содержанию повторяет первую ступень, но при ней оценивание выполняется по критерию количества запоминаемых частот. В результате этого радиосредство ITT SINCGARS исключается и в дальнейшем не рассматривается, так как оно не удовлетворяет второму критерию.

Третьему критерию удовлетворяют все оставшиеся радиосредства. На четвертой ступени исключается радиосредство Tadiran CNR – 900, так как оно не удовлетворяет критерию скрытности связи. Остается в рассмотрении два средства: это радиостанции Р-168-5УН(2) и Thomson – CSF PR4G.

В результате дальнейшей оценки радиостанция Р-168-5УН(2) исключается из рассмотрения при оценке по критерию ЭМС на девятой ступени.

После использования всех критериев оказалось, что всем заданным критериям удовлетворяет средство Thomson – CSF PR4G. Это является результатом проведенной оценки.

Таким образом, предлагаемый автором алгоритм выбора оптимального средства методом последовательного принятия решений на основе использования совокупности несопоставимых крите-

риев без построения интегрального критерия работоспособен и даёт хорошие результаты оценки.

Предлагаемый алгоритм выполнения многокритериальной оценки качества сложных систем без построения явной аналитической формы обобщенного критерия не имеет принципиальных ограничений на применимость. При его использовании существенно экономится время, затрачиваемое при различных подходах на построение интегрального критерия, либо иерархии для сравнительной оценки сложных систем и средств связи.

Литература

1. *Николаев В.И.* Системотехника: методы и приложения / В.И. Николаев, В.М. Брук. – Л. : Машиностроение, Ленинградское отделение, 1985. – 199 с., ил.

2. *Шаров А.Н.* Автоматизированные сети радиосвязи / Шаров А.Н. – Л. : ВАС, 1988. – 178 с.

3. *Губанов В.А.* Введение в системный анализ / В.А. Губанов, В.В. Захаров, А.Н. Коваленко; под ред. Л.А. Петросяна. – Л. : Изд-во ЛГУ, 1988. – 232 с.

4. *Окунев Ю.Б.* Принципы системного подхода к проектированию в технике связи / Ю.Б. Окунев, В.Г. Плотников. – М. : Связь, 1976. – 184 с.

5. *Цыбулин М.К.* Особенности оценки качества передачи речевой информации по каналам мобильной связи / М.К. Цыбулин, К.А. Бокуняев // Электросвязь. – 2003. – №10.

6. *Павлов Ю.С.* Многокритериальная оценка эффективности систем методом последовательного принятия решений Ю.С. Павлов // Радиолокация, навигация, связь: тез.докл. 8-й междунар.науч.-техн.конф., Воронеж, 23–25 апр. – ВНИИС, 2002. – Т. 2. – С. 1042–1048.

7. *Майоров В.В.* Метод построения функции принадлежности нечёткого множества на основе попарных сравнений и его использование для оценки качества функционирования сложных систем передачи информации / В.В. Майоров // Теория и техника радиосвязи : науч.-техн. сб. / ВНИИС. – Воронеж, 2005. – Вып. 1. – С. 74–78.

8. *Орловский С.А.* Проблемы принятия решений при нечёткой исходной информации / С.А. Орловский. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1981. – 208 с.

9. *Hussain S.A.* System evaluation of a frequency hopping combat net radio. Thesis. Thesis Advisor: Dan C. Boger. Naval Postgraduate school Monterey, California. September 1991.

10. Безопасность информационных технологий. Авторский сайт к.т.н. Домарёва Валерия Валентиновича. http://www.domarev.kiev.ua.

Получено 05.05.06г.

УДК 621.391

АНАЛИЗ МОДИФИЦИРОВАННОГО РЕКУРРЕНТНОГО АЛГОРИТМА ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ В АДАПТИВНОМ ЛИНЕЙНОМ СУММАТОРЕ

А.В. РЫЖКОВ, А.А. ТЕМНЫШОВ

Рассматривается синтез рекуррентных алгоритмов пространственно-временной обработки сигналов, позволяющих определить структуру устройства пространственно-временной обработки сигналов и исследовать степень подавления помех в конкретных системах.

Важнейшим элементом большинства адаптивных систем являются адаптивные линейные сумматоры (АЛС). Эти устройства в том или ином виде присутствуют во всех адаптивных системах, являясь наиболее важным элементом «обучения» систем и устройств обработки в целом. В то же время большинство адаптивных устройств можно рассматривать как частный случай АЛС. Так, одним из наиболее распространенных примеров АЛС можно считать адаптивные антенные решетки (ААР) систем пространственной обработки сигналов.

Весьма перспективным представляется рассмотрение синтеза АЛС с точки зрения теории М-систем. М-система характеризует лишь вид элементов, реализующих рассматриваемую систему или модель, а отнюдь не сложность самой системы, или сложность моделирования, которые при произвольной структуре М-системы могут быть весьма значительными. Поэтому М-системы могут рассматриваться как модели нестационарных подсистем обработки сигналов технических систем АЛС [1].

Рассмотрим синтез АЛС, предназначенных для приёма слабых сигналов в присутствии помех, превосходящих уровень шумового фона на порядок и более. Причём пространственное расположение источников полезного сигнала и помех априорно не известно. Полагая, что условие пространственно-временной узкополосности $\tau_{\max}\Delta f << 1$, где $\tau_{\max}$ – время распространения электромагнитной волны вдоль наибольшего размера антенны, $\Delta f = 1/\tau_k$ – полоса частот полезного сигнала, τ_k – интервал корреляции полезного сигнала, выполняется [2,3], получаем стандартную структуру АЛС [4,5]. Выходной сигнал этого АЛС формируется следующим образом:

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{W}^{*T}\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}^T(t)\mathbf{W}^*, \qquad (1)$$

где $\mathbf{X}(t)$ – вектор входных сумм сигнала, помех и шума, поступающих на элементы АЛС, W – вектор весовых коэффициентов (ВВК) [4].

Задача синтеза АЛС заключается в выборе оптимального ВВК.

Основным различием сигнала и помех в данном случае является уровень их мощности, поэтому задачей АЛС является снижение мощности помехи.

Мощность выходного сигнала АЛС имеет вид [2]:

$$P_A = \mathbf{W}^T\mathbf{R}_{XX}\mathbf{W}^*, \qquad (2)$$

где $\mathbf{R}_{XX}$ – ковариационная матрица входных сигнала, помех и шума на элементах АЛС:

$$\mathbf{R}_{XX} = \langle \mathbf{X}^*\mathbf{X}^T \rangle, \qquad (3)$$

где $\langle\ \rangle$ – среднее по ансамблю реализаций.

Минимизация (2) без дополнительных условий приводит к тривиальному решению W = 0, которое обеспечивает сведение к нулю не только помех, но и сигнала. Для того чтобы избежать подавления сигнала, необходимо выполнить некоторые дополнительные условия – ограничения [6].

Это приводит к необходимости решения задачи минимизации функционала (3) с линейными ограничениями вида [1]:

$$\mathbf{C}^T\mathbf{W}=\mathbf{F}, \qquad (4)$$

где **C** – матрица ограничений, а **F** – вектор ограничений.

Решение задачи можно найти методом множителей Лагранжа, получив оптимальный вектор, обеспечивающий минимум мощности (2) и удовлетворяющий требуемым ограничениям (4):

$$\mathbf{W}_{\text{опт}} = \mathbf{R}_{XX}^{-1}\mathbf{C}\left(\mathbf{C}^T\mathbf{R}_{XX}^{-1}\mathbf{C}\right)^{-1}\mathbf{F}. \quad (5)$$

Вычисление вектора весовых коэффициентов по формуле требует обращения матрицы $\mathbf{R}_{XX}$, что при большой размерности этой матрицы является непростой вычислительной задачей.

Можно получить рекуррентный алгоритм вычисления вектора $\vec{W}_{\text{опт}}$ с использованием алгоритма наискорейшего спуска с ограничениями.

$$\mathbf{W}(k+1) = \Pi\left[\langle\mathbf{W}(k)\rangle - \mu R_{XX}\langle X(k\Delta t)\rangle\right] + \mathbf{\Phi}, \quad (6)$$

где $\mathbf{\Phi} = \mathbf{C}(\mathbf{C}^T\mathbf{C})^{-1}\vec{\mathbf{F}}$, $\mathbf{\Pi} = \mathbf{I} - \mathbf{C}(\mathbf{C}^T\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}^T$,

$\mathbf{I}$ – единичная матрица и μ – константа, k – шаг итерации.

Задавая соответствующим образом ограничения (4), т.е. формализуя ограничения, существующие в реальной задаче, можно получить решение (5) и алгоритм формирования вектора (6) для случаев приёма:

1) узкополосного сигнала с заданного направления,

2) узкополосного сигнала с произвольного направления.

Приём узкополосного сигнала с заданного направления требует, чтобы ограничения (4) обеспечивали постоянное усиление в данном направлении. В этом случае матрица $\mathbf{C}$ имеет смысл вектора

$$\mathbf{C} = \left|e^{j\psi_{1S}}, e^{j\psi_{2S}}, ..., e^{j\psi_{NS}}\right|^T, \quad (7)$$

где ψ_{iS} – набег фазы узкополосного сигнала, принятого на i-й элемент АР (антенной решетки), N – количество элементов АР. Вектор $\mathbf{F}$ есть вектор, у которого все компоненты, кроме одной, нулевые. Условие (4) в этом случае имеет вид

$$\sum_{i=1}^{N} W_i e^{j\psi_{iS}} = f, \quad (8)$$

где f – не нулевая компонента вектора $\mathbf{F}$.

Приём узкополосного сигнала с неизвестного направления предполагает требование отличия от нуля хотя бы одного весового коэффициента, так как в противном случае критерий минимума мощности приведёт к тривиальному решению $\mathbf{W} = 0$. Это ограничение задаётся с помощью матрицы $\mathbf{C}$ и вектора ограничений $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{C}^T = [1, 0, 0, ..., 0], \quad (9)$$

$$\mathbf{F} = \vec{\mathbf{1}}.$$

Подставляя (9) в (4) получаем явный вид ограничений для данного случая:

$$W_1 = 1. \quad (10)$$

Оптимальный весовой вектор получается подстановкой (9) в (5):

$$\mathbf{W}_{\text{ОПТ}} = \mathbf{R}_{XX}^{-1}\mathbf{l} / \mathbf{l}^T\mathbf{R}_{XX}^{-1}\mathbf{l}, \quad (11)$$

или

$$\mathbf{W}_{\text{ОПТ}} = \begin{bmatrix} 1 \\ r_{12}^{-1}/r_{11}^{-1} \\ \vdots \\ r_{1N}^{-1}/r_{11}^{-1} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

где r_{ij}^{-1} – элементы матрицы $\mathbf{R}_{XX}^{-1}$, а $\boldsymbol{l} = [1, 0, ..., 0]$. Оптимальный вектор (12) может быть сформирован с помощью рекуррентного алгоритма, где в соответствии с (6)

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$$

получим:

$$\begin{aligned} W_1(k+1) &= 1, \\ W_i(k+1) &= W_i(k) - \mu\mathbf{R}_{XX}W_i(k), \end{aligned} \quad (13)$$

где $i = 2, ..., N$. Этот алгоритм с некоторыми модификациями берётся за основу разработанного многофункционального адаптивного процессора (МАП) [2].

МАП имеет следующий алгоритм подстройки весовых коэффициентов:

$$\mathbf{W}(k+1) = \mathbf{P}_1\mathbf{W}(k) - \mu\mathbf{P}_2\mathbf{R}_{nn}(k)\mathbf{W}(k), \quad (14)$$

где $\mathbf{R}_{nn}$ – оценка ковариационной матрицы,

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & p & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Коэффициент p в матрице $\mathbf{P}_1$ определяет скорость сходимости и берётся близким к единице $(p = 1 - \varepsilon)$, а матрица $\mathbf{R}_{nn}$ имеет вид

$$\mathbf{R}_{nn} = \left\langle \left(\sum_{l=1}^{N}\mathbf{Q}_l + \mathbf{N}_0\right)^* \left(\sum_{l=1}^{N}\mathbf{Q}_l + \mathbf{N}_0(t)\right)^T \right\rangle,$$

где $\mathbf{Q}_l(t)$ – вектор комплексных огибающих l-й помехи, $\mathbf{N}_0(t)$ – вектор комплексных огибающих шумов в отдельных каналах, взаимно независимых и имеющих дисперсию σ_n^2.

В установившемся режиме вектор весовых коэффициентов МАП определяется выражением

$$\mathbf{W}_{МАП} = \xi \mathbf{R}_{nn}^{-1}\mathbf{C}, \qquad (16)$$

где $\mathbf{C}^T = [1,0,...,0]$, а множитель ξ определяется из условия $C^T W_{МАП} = f$ (f – некоторая константа), т.е.

$$\xi = f\left(\mathbf{l}_T \mathbf{R}_{nn}^{-1}\mathbf{l}\right).$$

Подставляя структуру $X(t)$ в (2) с учетом того, что сигналы, помехи от разных источников и шумы в отдельных каналах некоррелированы, получаем

$$\mathbf{R}_{XX} = \mathbf{R}_{nn} + \mathbf{R}_{ss}. \qquad (17)$$

Уровень помех значительно превышает уровень сигнала, поэтому можно считать, что

$$\mathbf{R}_{XX} \approx \mathbf{R}_{nn}. \qquad (18)$$

При $f = 1$, $k = 1$ и выполнении соотношения (18) формулы (14)–(16) переходят в (13)–(11) соответственно.

Алгоритм АЛС, определяемый выражениями (11), (13), можно называть оптимальным алгоритмом минимизации мощности с ограничениями (ММ).

Приведенные алгоритмы позволяют:

1. Определить структуру устройства пространственной обработки сигналов при использовании алгоритмов минимизации мощности помех и защиты направления прихода полезного сигнала.

2. Для конкретных систем обработки исследовать степень подавления помех.

Определим предельную эффективность, которую может обеспечить предлагаемый алгоритм в установившемся режиме. Решить данную задачу аналитически для общего вида принимаемых входных сумм сигнала, помех и шума затруднительно, поэтому рассмотрим два частных случая.

Расчёт отношения помеха/шум (ОПШ)

На вход четырёхэлементной линейной антенной решётки поступает аддитивная смесь помехового сигнала большой мощности и гауссова шума, которая может быть представлена в виде

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{Q}(t) + \mathbf{N}_0(t), \qquad (19)$$

где $Q(t)$ – вектор комплексной огибающей помехи. Для упрощения анализа предположим, что помеховый сигнал приходит с направления, перпендикулярного апертуре антенны, тогда $\mathbf{Q}(t) = Q(t)$.

Рассчитаем ОПШ на выходе АР и сравним его с ОПШ на входе. Компоненты вектора весовых коэффициентов в установившемся режиме для оптимального алгоритма ММ определятся следующим образом:

$$W_i = A_{1i} / A_{11}, \qquad (20)$$

где A_{1i} – алгебраическое дополнение i-го элемента первой строки матрицы $\mathbf{R}_{xx}$.

$$R_{XX} = \left\langle \left(\mathbf{Q}(t) + \mathbf{N}_0(t)\right)^* \left(\mathbf{Q}(t) + \mathbf{N}_0(t)\right)^T \right\rangle =$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_n^2 + \langle Q^2(t)\rangle & \langle Q^2(t)\rangle & ... & \langle Q^2(t)\rangle \\ \langle Q^2(t)\rangle & \sigma_n^2 + \langle Q^2(t)\rangle & ... & \langle Q^2(t)\rangle \\ ... & ... & ... & ... \\ \langle Q^2(t)\rangle & \langle Q^2(t)\rangle & ... & \sigma_n^2 + \langle Q^2(t)\rangle \end{pmatrix}.$$

На основе этого получаем

$$W_1 = 1, \quad W_{2,3,4} = \frac{\xi}{1+3\xi},$$

где $$\xi = \left\langle Q^2(t)\right\rangle / \sigma_n^2.$$

Мощности помехи и шума на выходе АР:

$$P_l = \sigma_n^2 \xi \left(\sum_{i=1}^{4} W_i\right)^2 = \frac{\xi}{(1+3\xi)^2}$$
$$P_n = \sigma_n^2 \sum_{i=1}^{4} W_i^2 = \frac{1+6\xi+12\xi^2}{(1+3\xi)^2}. \qquad (21)$$

Отношение помеха/шум на выходе и коэффициент подавления помехи:

$$\text{ОПШ}_{\text{вых}} = \frac{\xi}{1+6\xi+12\xi^2}, \qquad (22)$$

$$\gamma = 1+6\xi+12\xi^2. \qquad (23)$$

При $\xi >> 1$ из (23), (24) получаем

$$\text{ОПШ}_{\text{вых.}} \approx 1/12\xi, \ \gamma = 12\xi^2. \qquad (24)$$

Диаграмма направленности в направлении на помеху:

$$F(0) = 1/\left(1+3\xi_s\right).$$

Анализируя (24) можно отметить, что при большом уровне помех на входе рассмотренный алгоритм осуществляет «инверсию мощности», а эффективность работы АР, т.е. коэффициент подавления помехи, тем выше, чем мощнее помеха на входе (коэффициент подавления помехи пропорционален квадрату мощности помехи).

Расчёт отношения сигнал/помеха (ОСП)

Рассмотрим эффективность алгоритма МАП в случае, когда на вход двухэлементного АЛС с межэлементным расстоянием $d = \lambda/2$ поступает электромагнитное колебание, вектор комплексной огибающей которого можно представить в виде

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{S}(t) + \mathbf{Q}(t) = S(t)e^{j\vec{\psi}_s} + $$

$$+Q(t)e^{j\vec{\psi}_q} = \begin{pmatrix} S(t)+Q(t) \\ S(t)e^{j\psi_s} + Q(t)e^{j\psi_s} \end{pmatrix}. \qquad (25)$$

Здесь $\psi_s = \dfrac{2\pi d}{\lambda}\sin\theta_s$ и $\psi_q = \dfrac{2\pi d}{\lambda}\sin\theta_q$ – фазовый набег сигнала и помехи на втором элементе по отношению к первому элементу сумматора.

При отсутствии взаимной корреляции помехового и полезного сигнала ковариационная матрица R_{xx} принятого колебания (25) запишется следующим образом:

$$R_{xx} = \begin{pmatrix} P_S + P_q & P_S e^{-j\psi_s} + P_q e^{-j\psi_q} \\ P_S e^{j\psi_s} + P_q e^{j\psi_q} & P_S + P_q \end{pmatrix}, \qquad (26)$$

где $P_S = \dfrac{\langle S^*(t)S(t)\rangle}{2}$ и $P_q = \dfrac{\langle Q^*(t)Q(t)\rangle}{2}$ – мощности сигнала и помехи на входе отдельного элемента АЛС.

Подставляя (26) в (20), получаем

$$W_1 = 1;\ W_2 = -\frac{P_s e^{j\psi_s}}{P_s + P_q} - \frac{P_q e^{j\psi_q}}{P_s + P_q}. \qquad (27)$$

Используя (27), нетрудно рассчитать отношение мощности сигнала к мощности помехи на выходе АЛС при $P_s << P_q$:

$$\text{ОСП}_{\text{вых.}} =$$

$$= \frac{P_s}{P_q} = \frac{\left\langle \left| W^* S(t) \right|^2 \right\rangle}{\left\langle \left| W^* Q(t) \right|^2 \right\rangle} = 4\frac{P_q}{P_s}\sin^2\left(\frac{\psi_q - \psi_s}{2}\right). \qquad (28)$$

Эффективность подавления помех можно описать коэффициентом эффективности:

$$\eta = \frac{\text{ОСП}_{\text{вых}}}{\text{ОСП}_{\text{вх}}} = 4\frac{P_q^2}{P_s^2}\sin^2\left(\frac{\psi_q - \psi_s}{2}\right). \qquad (29)$$

Как следует из (29), $\text{ОСП}_{\text{вых}}$ обратно пропорционально $\text{ОСП}_{\text{вх}} = P_s/P_q$, где осуществляется «инверсия мощности». Коэффициент эффективности (29) пропорционален $\text{ОСП}_{\text{вх}}^2$ и зависит от угла прихода сигнала и помехи. Если $\psi_q - \psi_s = 2k\pi$, то $\text{ОСП}_{\text{вых}} = \eta = 0$. Это имеет место, когда сигнал и помехи приходят с одного и того же, или зеркального относительно линии расположения приёмных элементов направлений.

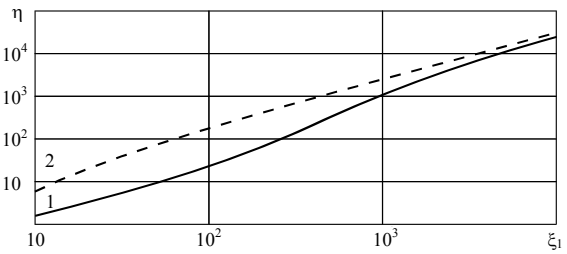


Рис 1. Зависимость коэффициента эффективности от мощности помех
1 – k=0,9; 2 – k=0,99; L=4

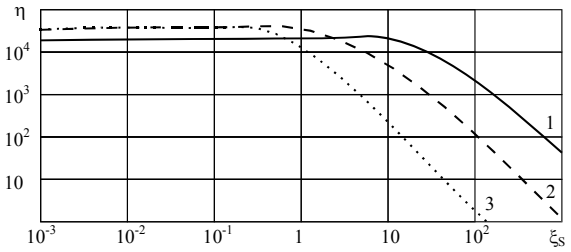


Рис 2. Зависимость коэффициента эффективности от мощности полезного сигнала
1 – k = 0,8; 2 – k = 0,9; 3 – k = 0,99; L = 4; $\xi_1 = 10^4$

На рис.1 и 2 представлены соответственно зависимости коэффициента эффективности от мощности помех и от мощности полезного сигнала. Анализ представленных кривых позволяет сделать следующие выводы:

1. Алгоритм ММ является алгоритмом «инверсии мощности».

2. Эффективность алгоритма ММ зависит в основном от мощности помехового сигнала,

причем, чем выше мощность помех, тем выше эффективность алгоритма. При больших уровнях помех коэффициент эффективности пропорционален квадрату их мощности.

3. Коэффициент эффективности АЛС до определенного момента слабо зависит от мощности полезного сигнала, после которого с ростом мощности полезного сигнала эффективность падает.

Литература

1. *Бухарин С.В.* Методы и приложения теории нестационарных М-систем / С.В. Бухарин, В.Г. Рудалев. – Воронеж: Изд-во ВГУ, 1992. – 168 с.

2. *Бухарин С.В.* Оптимальный синтез систем пространственно-временной обработки сигналов на базе L-проблемы моментов / С.В. Бухарин, И.Л. Покопаева // Электросвязь. – 1992. – № 10.

3. *Коростелев А.А.* Пространственно-временная теория радиосистем / А.А. Коростелев. – М. : Радио и связь, 1981. – 320с.

4. *Уидроу Б.* Адаптивная обработка сигналов / Б. Уидроу, С. Стринз. – М. : Радио и связь, 1989.

5. *Уидроу Б.* Адаптивные антенные системы / Б. Уидроу и др. // Труды института инженеров по электротехнике и радиоэлектронике. – 1967. – Т. 55. – № 12.

6. *Монзинго Р.А.* Адаптивные антенные решётки. Введение в теорию / Р.А. Монзинго, Г.У. Миллер. – М. : Радио и связь, 1986.

Получено 01.06.06г.

УДК 621.3.015.4

АНАЛИЗ ВЫНУЖДЕННЫХ ПРОЦЕССОВ В РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ МЕТОДОМ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Ю.Б. НЕЧАЕВ, Н.Д. БИРЮК, Е.В. ЛАТЫШЕВА

Предложен метод анализа вынужденных процессов в колебательном контуре при произвольном возмущении с помощью теории бесконечных систем уравнений. Кратко изложена эта теория в удобном для практического применения виде. Метод может быть обобщен на другие радиотехнические задачи.

Классическая теория бесконечных алгебраических систем уравнений [1, 2] достаточно обособлена и систематизирована. Она применяется в прикладных задачах, главным образом, в механике [3-9]. Анализ показывает, что область применимости этой теории можно расширить и на радиотехнические задачи.

Цель настоящей публикации – предложить метод анализа вынужденных колебаний в радиотехнических колебательных системах на основе теории бесконечных систем уравнений. Для конкретности и удобства читателей в качестве анализируемой системы выбран колебательный контур с произвольной возмущающей э.д.с.

В радиотехнике часто реализуются периодические и квазипериодические процессы, которые принято представлять в виде рядов Фурье. Эти ряды обычно без особых сомнений усекаются, и таким образом получается приближенное описание соответствующего процесса. То же можно сказать о представлении соответствующих решений уравнений в виде рядов Маклорена. Возможность усечения системы должна быть обоснована. Иными словами, нужно доказать сходимость полученной бесконечной системы уравнений. В статье кратко изложена теория бесконечных систем уравнений в форме, пригодной непосредственно для практической реализации.

Элементы теории абстрактных линейных алгебраических систем уравнений

Бесконечная система алгебраических уравнений может быть представлена в привычном стандартном виде

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots = b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots = b_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\}$$

Однако более удобной оказалась другая форма представления. Перенесем все слагаемые в правую часть, а в левой оставим в первом уравнении x_1, во втором уравнении x_2 и т.д.

$$\left.\begin{aligned} &x_1 = (1 - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \ldots + b_1 \\ &x_2 = -a_{21}x_1 + (1 - a_{22})x_2 - \ldots + b_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\}$$

Принято [1,2] такую систему представлять в виде

$$x_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k}x_k + b_i, \quad i = 1,2,\ldots\infty \qquad (1)$$

Здесь предполагается, что коэффициенты c_{ik} и свободные члены могут быть комплексными. Теория бесконечных систем призвана дать ответы на поставленные ниже вопросы:

1. Имеет ли система (1) решение, удовлетворяющее данным условиям? Единственно ли решение системы?

2. Каким методом может быть найдено решение? Для этого в общем случае потребуется бесконечное число операций.

3. Как при конечном числе действий найти приближенное решение? При этом предполагается, что должна быть дана оценка приближенного решения.

Если в (1) числа $c_{i,k}$ и b_i комплексные, или действительные, но не все из них положительны, то предполагается для (1) построить мажорантную систему

$$X_i = \sum_{i=1}^{\infty} C_{i,k}X_k + B_i, \quad i = 1,2,\ldots\infty \qquad (2)$$

с выполнением нестрогих неравенств

$$\begin{aligned} &|c_{i,k}| \le C_{i,k} \quad (i=1,2,...,\infty,\ k=1,2,...,\infty), \\ &|b_i| \le B_i \quad (i=1,2,...,\infty). \end{aligned} \tag{3}$$

Как видно, в мажорантной системе все коэффициенты и свободные члены могут быть положительными действительными числами или нулями.

Доказано, что если мажорантная система имеет неотрицательное решение $X_i \ge 0$, то и исходная система имеет решение x_i, которое может быть найдено методом последовательных приближений. При этом выполняется неравенство

$$|x_i| \le X_i . \tag{4}$$

Метод последовательных приближений дает возможность по менее точному решению $x_i^{(n)}$ системы (1) получить более точное решение $x_i^{(n+1)}$ по формуле

$$x_i^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k} x_k^{(n)} + b_i . \tag{5}$$

При решении методом последовательных приближений системы (1) было условлено начинать исследовательские приближения с решения $x_i^{(0)} = 0$. Принято считать решение $x_i = \lim\limits_{n\to 0} x^{(n+1)}$, полученное методом последовательных приближений при нулевых начальных условиях $\left(x_i^{(0)} = 0\right)$, *главным решением* системы (1).

Можно показать, что если в системе (1) коэффициенты и свободные члены неотрицательны $\left(c_{i,k} \ge 0,\ b_i \ge 0\right)$, то и главное решение неотрицательно $\left(x_i \ge 0\right)$. В таком случае целесообразность построения мажорантной системы вызывает сомнения, так как система (1) является сама для себя мажорантной.

Утверждение 1. Если x_i – единственное решение системы (1), причем $|x_i| \le PX_i$ ($P \ge 1$ – постоянная, X_i – решение мажорантной системы), то x_i – главное решение системы (1). К этому решению приводит метод последовательных приближений, если начальное значение $x_i^{(0)}$ удовлетворяет неравенству $\left|x_i^{(0)}\right| \le PX_i$.

Утверждение 2. Пусть дана последовательность бесконечных систем типа (1):

$$x_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k}^{(s)} x_k + b_i^{(s)},\ \ s=1,2,...\infty , \tag{6}$$

имеющих общую мажорантную систему (2) с неотрицательным решением. Пусть существуют предельные переходы

$$\lim_{s\to\infty} c_{i,k}^{(s)} = c_{i,k},\quad \lim_{s\to\infty} b_i^{(s)} = b_i , \tag{7}$$

т.е. система (1) является предельной для системы (6). Тогда между главным решением x_i системы (2) и главным решением $x_i^{(s)}$ последовательности систем (6) существует зависимость

$$\lim_{s\to\infty} x_i^{(s)} = x_i . \tag{8}$$

Утверждение 3. Решение системы (1), имеющей мажорантную систему (2) с неотрицательным решением, может быть найдено по методу редукции, т.е. с помощью предельного перехода решения конечной системы, получающейся из бесконечной отбрасыванием всех уравнений, начиная с некоторого. Точнее говоря, если бесконечную систему (1) заменить конечной

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= c_{1,1}x_1 + c_{1,2}x_2 + ... + c_{1,N}x_N + b_1 \\ x_2 &= c_{2,1}x_1 + c_{2,2}x_2 + ... + c_{2,N}x_N + b_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_N &= c_{N,1}x_1 + c_{N,2}x_2 + ... + c_{N,N}x_N + b_N \end{aligned}\right\}, \tag{9}$$

которая имеет решение $x_i^{(N)}\ (i=1,2,...,N)$, то выполняется предельный переход

$$\lim_{N\to\infty} x_i^{(N)} = x_i , \tag{10}$$

где x_i – главное решение системы (1).

Для дальнейшего развития теории бесконечных систем оказалось целесообразным выделить из класса бесконечных систем (1) подкласс регулярных и вполне регулярных бесконечных систем.

Определение 1. Регулярной системой называется бесконечная система типа (1), в которой выполняется условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_{i,k}| < 1,\ \ i=1,2,...,\infty , \tag{11}$$

т.е. сумма модулей коэффициентов в каждой строке меньше единицы.

Определение 2. Если же эта сумма меньше некоторого положительного числа, меньшего единицы, то система (1) называется вполне регулярной. Для нее справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|c_{i,k}\right| \le 1-\theta < 1, \quad i=1,2,...,\infty . \qquad (12)$$

Для разделения регулярных и вполне регулярных систем вводится параметр

$$\rho_i = 1-\sum_{k=1}^{\infty}\left|c_{i,k}\right|, \quad i=1,2,...,\infty . \qquad (13)$$

Для регулярных систем $0<\rho_i<1$, для вполне регулярных $0<\theta\le\rho_i<1$.

Пусть дана регулярная система (1), причем на свободные члены наложено ограничение

$$\left|b_i\right| \le K\rho_i , \qquad (14)$$

где $K>0$ – постоянная. Тогда система уравнений

$$X_i = \sum_{i=1}^{\infty}\left|c_{i,k}\right| X_k + K\rho_i \qquad (15)$$

является мажорантной для системы (1). Неравенство (15) позволяет доказать теорему.

Теорема 1. Регулярная система уравнений, свободные члены которой удовлетворяют неравенству (14), имеет ограниченное решение

$$\left|x_i\right| \le K , \qquad (16)$$

которое может быть найдено методом последовательных приближений.

Следствие. Для вполне регулярных систем $\rho_i \ge 0$, поэтому справедливо неравенство $\left|b_i\right| \le K\theta = P$, где P – произвольно. Тогда справедливо неравенство $\left|x_i\right| \le \dfrac{P}{\theta}$.

В прикладных задачах часто выполняется условие: среди свободных членов $b_i \ \ (i=1,2,...,\infty)$ только конечное число отлично от нуля. Тогда условие (14) заведомо выполняется, и регулярная система имеет ограниченное решение.

Для регулярных (как и для любых) систем важное значение имеет вопрос о единственности решения. Он уточняется с помощью следующей теоремы.

Теорема 2. Если главное решение мажорантной системы (15) ограничено снизу положительным числом

$$X_i \ge \alpha > 0 , \qquad (17)$$

то регулярная система (1) имеет единственное ограниченное решение, к которому приводит метод последовательных приближений, начинающийся с любых начальных значений, ограниченных в совокупности. Решение (17), кроме того, подчиняется неравенству $X_i < K$.

Заметим, что для вполне регулярных систем условие (17) выполняется всегда. Поэтому вполне регулярная система всегда имеет единственное ограниченное решение, которое может быть найдено методом последовательных приближений, начинающимся от любой ограниченной системы начальных значений.

Нетрудно убедиться, что регулярная система, состоящая из конечного числа уравнений, является вполне регулярной.

На конкретных примерах было показано, что регулярная система может иметь несколько различных ограниченных решений. При этом главное ограниченное решение может быть только одно. Доказана теорема, уточняющая этот вопрос.

Теорема 3. Регулярная система может иметь не более чем одно решение, стремящееся к нулю, т.е. такое, что $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = 0$. Если коэффициенты и свободные члены регулярной системы положительны, то положительное, стремящееся к нулю решение является главным решением системы.

Следствие. Если при некоторой подстановке $x_i = H_i z_i \left(H_i \ne 0, \ \lim\limits_{i\to\infty} H_i = \infty\right)$ регулярная система переходит в регулярную, т.е. система

$$z_i = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_{i,k}H_k}{H_i}z_i + \frac{b_i}{H_i} \quad (i=1,2,...,\infty)$$

окажется снова регулярной, т.е.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|c_{i,k}\right|\left|\frac{H_k}{H_i}\right| = 1-\rho_i', \quad \rho_i'>0, \quad b_i \le K'H_i\rho_i' ,$$

то исходная система (1) имеет единственное ограниченное решение.

Следующая теорема имеет важное прикладное значение.

Теорема 4. Главное решение регулярной системы (1)

$$x_i = \sum_{k=1}^{\infty}c_{i,k}x_k + b_i, \quad i=1,2,...\infty$$

со свободными членами, удовлетворяющими условию $|b_i| \le K\rho_i$, может быть найдено методом редукции, т.е. если $x_i^{(N)}$ есть решение конечной системы

$$x_i^{(N)} = \sum_{k=1}^{N} c_{i,k} x_k + b_i, \quad i = 1,2,...N, \qquad (18)$$

то

$$x_i = \lim_{N\to\infty} x_i^{(N)}. \qquad (19)$$

Приведенные в кратком изложении основы регулярных и вполне регулярных систем дали возможность разработать приближенный метод их решения [1]. Сначала рассмотрим частный случай $c_{i,k} > 0,\ b_i > 0$, который также интересен сам по себе в приложениях. Заменим систему (1) конечной системой N уравнений (9). В этих системах коэффициенты и свободные члены совпадают при $i,k \le N$, при $i,k > N$ коэффициенты и свободные члены в системе (1) положительны, а в системе (9) равны нулю. Следовательно, система (1) является мажорантной для системы (9), поэтому решение системы (9) является решением с недостачей для решения $x_i\ (i = 1,2,...,N)$ системы (1), т.е.

$$\underline{x_i} < x_i. \qquad (20)$$

Кроме того, выполняется предельное равенство

$$\lim_{N\to\infty} \underline{x_i} = x_i. \qquad (21)$$

На основании конечной системы (9) можно получить приближенное решение $\overline{x_i}$ системы (1) с превышением. Для этого предположим, что мы знаем точное решение системы (1), которое по определению удовлетворяет конечной системе

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= c_{1,1}x_1 + c_{1,2}x_2 + ... + c_{1,N}x_N + b_1 + \sum_{k=N+1}^{\infty} c_{1,k}x_k \\ x_2 &= c_{2,1}x_1 + c_{2,2}x_2 + ... + c_{2,N}x_N + b_2 + \sum_{k=N+1}^{\infty} c_{2,k}x_k \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_N &= c_{N,1}x_1 + c_{N,2}x_2 + ... + c_{N,N}x_N + b_N + \sum_{k=N+1}^{\infty} c_{N,k}x_k \end{aligned}\right\}. \qquad (22)$$

Решения x_i при $i > N$ нам известны, они формально представлены под знаком суммы в конце правой части (22). Однако известно, что каждая функция решения x_i в отдельности не превосходит K (теорема 1). В таком случае, заменив все решения в (22) под знаком суммы через K, получим

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= c_{1,1}x_1 + c_{1,2}x_2 + ... + c_{1,N}x_N + b_1 + K\sum_{k=N+1}^{\infty} c_{1,k} \\ x_2 &= c_{2,1}x_1 + c_{2,2}x_2 + ... + c_{2,N}x_N + b_2 + K\sum_{k=N+1}^{\infty} c_{2,k} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_N &= c_{N,1}x_1 + c_{N,2}x_2 + ... + c_{N,N}x_N + b_N + K\sum_{k=N+1}^{\infty} c_{N,k} \end{aligned}\right\}. \qquad (23)$$

Это конечная система уравнений, которая является мажорантной по отношению к исходной бесконечной системе (1). Следовательно, ее решение $\overline{x_i}$ будет с избытком, т.е.

$$\overline{x_i} > x_i. \qquad (24)$$

В пределе при $N \to \infty$ система (23) совпадает с исходной системой (1), поэтому

$$\lim_{N\to\infty} \overline{x_i} = x_i. \qquad (25)$$

Итак, имеем

$$\lim_{N\to\infty} \underline{x_i} = \lim_{N\to\infty} \overline{x_i} = x_i. \qquad (26)$$

Первый предел стремится к действительному решению снизу, а второй – сверху. Обнаруженные свойства системы (1) дают основания для ее решения методом редукции при выполнении упомянутых ограничений $(c_{i,k} \ge 0, b_i \ge 0)$. Метод редукции является наглядным и удобным для прикладников, особенно в случае использования ЭВМ, где с помощью стандартных программ можно получать решения конечных систем при достаточно большом N.

Выше рассмотрен метод редукции приближенного решении системы (1) в предположении, что эта система регулярна и выполняются условия $c_{i,k} > 0, b_i > 0$. Известно обобщение этого метода на случай, когда последние неравенства сняты. Рассмотрим подробнее это обобщение. Пусть дана *регулярная* система (1) с любыми коэффициентами и свободными членами. Составим положительные числа

$$R_N^{(i)} = \sum_{k=N+1}^{\infty} |c_{i,k}|. \qquad (27)$$

Теперь вместо (23) введем в рассмотрение следующую систему $2N$ уравнений с $2N$ неизвестными, которые здесь обозначены через $\underline{x_i}, \overline{x_i}$ (оказывается, что $\underline{x_i}$ – решение с недостачей, а $\overline{x_i}$ – с избытком):

$$\left.\begin{aligned}\underline{x_i} &= \sum_{k=1}^{N}{}' c_{i,k}\,\underline{x_k} + \sum_{k=1}^{N}{}'' c_{i,k}\,\overline{x_k} + b_i - R_N^{(i)}K \\ \overline{x_i} &= \sum_{k=1}^{N}{}' c_{i,k}\,\overline{x_k} + \sum_{k=1}^{N}{}'' c_{i,k}\,\underline{x_k} + b_i - R_N^{(i)}K\end{aligned}\right\}, \quad (28)$$

$$i = 1,2,...,N.$$

Сначала из нижней системы вычтем верхнюю, затем к нижней системе добавим верхнюю. Получим

$$\overline{x_i} - \underline{x_i} = \sum_{k=1}^{N}{}' c_{i,k}\left(\overline{x_k} - \underline{x_k}\right) + \sum_{k=1}^{N}{}''\left(-c_{i,k}\right)\left(\overline{x_k} - \underline{x_k}\right) +$$

$$+2R_N^{(i)}K = \sum_{k=1}^{N}\left(c'_{i,k} + \left|c''_{i,k}\right|\right)\left(\overline{x_k} - \underline{x_k}\right) + 2R_N^{(i)}K,$$

$$\overline{x_i} + \underline{x_i} = \sum_{k=1}^{N}\left(c'_{i,k} + c''_{i,k}\right)\left(\overline{x_k} + \underline{x_k}\right) + 2b_i, \ i = 1,2,...,N. \quad (29)$$

Это две независимые вполне регулярные системы. Из первой можно найти $\overline{x_i} - \underline{x_i}$, из второй соответственно $\overline{x_i} + \underline{x_i}$, а по ним $\overline{x_i}$ и $\underline{x_i}$.

Действительное решение x_i регулярной системы (1) находится в пределах

$$\underline{x_i} < x_i < \overline{x_i}. \quad (30)$$

Доказано, что чем больше N, тем ближе $\overline{x_i}$ и $\underline{x_i}$ к действительному решению x_i. В пределе имеем

$$\lim_{N\to\infty}\underline{x_i} = \lim_{N\to\infty}\overline{x_i} = x_i. \quad (31)$$

Из приведенных рассуждений вытекают конкретные рекомендации по решению бесконечной системы (1). Прежде всего нужно убедиться, что система (1) регулярна или вполне регулярна. Если это не так, то нужно попытаться преобразовать ее, чтобы она была регулярной или вполне регулярной. После этого можно применять метод редукции непосредственно к системе (1). В самом деле, если ограничиться N уравнениями системы (1), то получим

$$x_i = \sum_{k=1}^{N} c_{i,k}x_k + b_i, \ \ (i = 1,2,...,N). \quad (32)$$

Пусть решение этой системы состоит из N чисел $x^*{}_i$. Сравнивая уравнение (32) с уравнениями (28), замечаем, что уравнения (28) находятся между двумя уравнениями (32), следовательно,

$$\underline{x_i} < x^*{}_i < \overline{x_i}. \quad (33)$$

Отсюда следует, что при переходе к пределу получим

$$\lim_{N\to\infty} x^*{}_i = x_i. \quad (34)$$

Поэтому применение метода редукции непосредственно к регулярному уравнению (1) при любых коэффициентах и свободных членах является корректным.

Бесконечные системы, близкие или приводящиеся к регулярным

1. *Бесконечные в четыре стороны системы*

Выше рассмотрены системы, бесконечные в две стороны – вниз и вправо (иногда их называют полубесконечными). На практике часто возникают системы, бесконечные в четыре стороны: вниз, вверх, вправо, влево. Такие системы всегда можно представить в виде

$$x_i = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{i,k}x_k + b_i, \ \ (i = 0,\pm1,\pm2,...,\pm\infty). \quad (35)$$

На такие системы переносится теория регулярных систем. В частности, если выполнено условие

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|c_{i,k}\right| \le 1-\theta, \ \ \theta > 0, \ \ i = 0,\pm1,\pm2,...,\pm\infty,$$

то система (35) является вполне регулярной и для нее справедлива теория вполне регулярных полубесконечных систем.

2. Если бесконечная система не является регулярной, то иногда ее можно привести к регулярной, например, с помощью подстановки $z_i = \alpha_i x_i$ или с помощью сложения и вычитания уравнений системы.

3. *Квазирегулярные системы.* Это системы, условие регулярности которых выполняется для уравнений, чей порядок начинается с некоторого конечного числа $N+1$, т.е. первые N уравнений не удовлетворяют условиям регулярности. Такие системы подчиняются неравенствам:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|c_{i,k}\right| < 1, \ \ i = N+1, N+2,...,\infty, \quad (36)$$

$$\left.\begin{array}{l}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|c_{i,k}\right|<+\infty,\quad i=1,2,...,N\\ b_i=K\rho_i=K\left(1-\sum\limits_{k=N+1}^{\infty}\left|c_{i,k}\right|\right),\quad i=N+1,N+2,...,\infty\end{array}\right\}. \tag{37}$$

Вопрос о существовании решения такой системы сводится к вопросу о существовании решения конечной системы. Чтобы показать это, рассмотрим регулярную систему

$$x_i=\sum_{k=N+1}^{\infty}c_{i,k}x_k+\left(b_i+\sum_{k=1}^{N}c_{i,k}x_k\right),\quad \left(i=N+1,N+2,...,\infty\right). \tag{38}$$

Если бы в этой системе были только свободные члены b_i, то система имела бы ограниченное решение $\left|\xi_i\right|\le K$. Если бы в системе (38) свободным членом был $c_{i,k}\left(k=1,2,...,N\right)$, то система также имела бы ограниченное решение $a_i^{(k)}\left(\left|a_i^{(k)}\right|<1,\ \text{т.к. }\left|c_{i,k}\right|\le 1-\sum\limits_{k=N+1}^{\infty}\left|c_{i,k}\right|\right)$. Используя эти условия и применяя принцип суперпозиции, можно записать решение (38) в виде

$$x_i=a_i^{(1)}x_1+a_i^{(2)}x_2+...+a_i^{(N)}x_N+\xi_i,\quad \left(i=N+1,N+2,...,\infty\right). \tag{39}$$

Подставляя эти значения в уравнения

$$x_i=\sum_{k=1}^{N}c_{i,k}x_k+b_i,\ \left(i=1,2,...,N\right),$$

получим систему N уравнений с N неизвестными. Если эта система имеет решение, то его нужно подставить в (39) и оценить решения исходной системы ξ_i.

4. *Нормальные бесконечные определители.* Существует теория бесконечных систем, альтернативная теории регулярных бесконечных систем. Согласно этой теории, выделяются бесконечные системы с *нормальными определителями*. Матрица таких систем представляется в том же виде, что и у регулярных систем:

$$\left\|\begin{array}{cccc}1+c_{11} & c_{12} & c_{13} & ...\\ c_{21} & 1+c_{22} & c_{23} & ...\\ c_{31} & c_{32} & 1+c_{33} & ...\\ ... & ... & ... & ...\end{array}\right\|. \tag{40}$$

Если двойной ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left|c_{i,k}\right|$ сходится, то определитель Δ этой матрицы является конечным и называется нормальным определителем. Если k-й столбец определителя заменить ограниченными числами $b_1,b_2,...,\infty$, то полученный определитель будет сходящимся. Обозначим его через $\Delta^{(k)}$. В таком случае решение бесконечной системы

$$x_i+\sum_{k=1}^{\infty}c_{i,k}x_k=b_i \tag{41}$$

находится по тем же правилам, что и конечной

$$x_i=\frac{\Delta^{(i)}}{\Delta}. \tag{42}$$

В данном случае требование сходимости двойной бесконечной суммы $\sum\limits_{k,i=1}^{\infty}\left|c_{i,k}\right|$ часто бывает в прикладных задачах слишком ограничительным *Х.* Кох заметно ослабил это ограничительное условие и заменил сходимость упомянутого двойного ряда сходимостью рядов $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left|c_{i,i}\right|$, $\sum\limits_{i,k=1}^{\infty}{c^2}_{i,k}$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty}{b^2}_i$. Тогда решение может быть получено по формуле (42), при этом оно подчиняется условию – $\sum\limits_{i=1}^{\infty}{x^2}_i$ сходится. Можно последние три условия заменить двумя условиями – сходимостью ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left|c_{i,i}\right|$ и $\left|c_{i,i}\right|<\alpha_i$, где ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\alpha_i$ сходится.

Итак, выше представлена в предельно краткой форме теория бесконечных систем. Основная цель – сделать стиль и содержание работы удобными для применения существующей теории в конкретных задачах. В радиотехнике такие задачи имеют место, причем они достаточно многочисленны. Рассмотрим одну из них, при этом сделаем акцент на способ привлечения абстрактной теории к решению конкретной задачи. Ранее это делалось применительно к механическим задачам [3–9], а именно к проблеме кручения упругих стержней с разными поперечными сечениями.

Вынужденные колебания в резонансном контуре при произвольном возмущении

Рассмотрим вынужденный процесс в последовательном контуре при возмущении произвольной

э.д.с. $\varepsilon(t)$, от которой требуется только гладкость, достаточная для того, чтобы можно было разложить функцию $\varepsilon(t)$ в ряд Маклорена по степеням *t*. Схема контура представлена на рис.1. Предполагается, что индуктивность *L*, активное сопротивление *R* и емкость *C* от времени не зависят. Второй закон Кирхгофа приводит к следующему уравнению контура:

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int idt=\varepsilon(t).$$

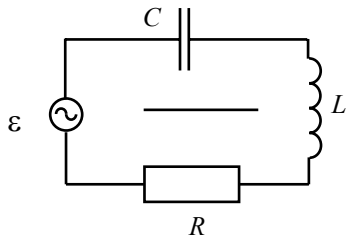


Рис.1. Схема последовательного контура

При сложных математических преобразованиях уравнение контура целесообразно представить в нормированном виде. С этой целью введем постоянные положительные масштабные делители $t_{\text{м}}, i_{\text{м}}$, имеющие размерности соответственно времени и тока, затем перейдем к нормированным переменным

$$\tau=\frac{t}{t_{\text{м}}},\ x=\frac{i}{i_{\text{м}}}.$$

Уравнение контура в нормированных переменных имеет вид

$$\frac{L}{t_{\text{м}}R}\frac{dx}{d\tau}+x+\frac{t_{\text{м}}}{RC}\int xd\tau=\frac{\varepsilon(\tau)}{i_{\text{м}}R}.$$

Заметим, что параметры контура $\frac{L}{R}$, RC имеют размерности времени. Введем обозначения $t_L=\frac{L}{R}$, $t_C=RC$, $\frac{\varepsilon(\tau)}{R}=j(\tau)$, где $j(\tau)$ - эквивалентный возмущающий ток. Тогда в новых обозначениях уравнение контура примет вид

$$\frac{t_L}{t_{\text{м}}}\frac{dx}{d\tau}+x+\frac{t_{\text{м}}}{t_C}\int xd\tau=\frac{j(\tau)}{i_{\text{м}}}.$$

Как видно, изменяя масштабный делитель $t_{\text{м}}$, можно уменьшать (увеличивать) первое слагаемое левой части, а изменением масштабного делителя $i_{\text{м}}$ можно как угодно изменять правую часть (свободный член), не изменяя других слагаемых.

Положим $t_{\text{м}}=t_C$ и обозначим $\frac{t_L}{t_C}$ через a, а правую часть $\frac{j(\tau)}{i_{\text{м}}}$ через $f(\tau)$.

Тогда уравнение контура изменится следующим образом:

$$a\frac{dx}{d\tau}+x+\int xd\tau=f(\tau),\ a=\text{const}. \qquad (43)$$

Правую часть, решение, его производную и интеграл представляем в виде рядов Маклорена:

$$\begin{gathered}f(\tau)=\sum_{i=0}^{\infty}f_i\tau^i,\ \ x(\tau)=\sum_{i=0}^{\infty}x_i\tau^i,\\ \frac{dx(\tau)}{d\tau}=\sum_{i=1}^{\infty}ix_i\tau^{i-1},\ \ \int x(\tau)d\tau=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x_i\tau^{i+1}}{i+1}.\end{gathered} \qquad (44)$$

Если подставить выражения (44) в уравнение (43), то после должных преобразований получим

$$x_0+ax_1+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{1}{i}x_{i-1}+x_i+(i+1)ax_{i+1}\right]\tau^i=\sum_{i=0}^{\infty}f_i\tau^i. \qquad (45)$$

Выбирая слагаемые с $\tau^0=1$, получим $x_0+ax_1=f_0$.

Точно так же можно выбрать слагаемые с τ^i, тогда после сокращения на τ^i имеем

$$\frac{1}{i}x_{i-1}+x_i+(i+1)ax_{i+1}=f_i,\ \ i=1,2,...,\infty.$$

В каноническом виде бесконечная система (1) представится так:

$$\begin{aligned}x_0&=0x_0-ax_1+f_0,\\ x_1&=-1x_0+0x_1-2ax_2+f_1,\\ x_2&=-\frac{1}{2}x_1+0x_2-3ax_3+f_2,\\ x_3&=-\frac{1}{3}x_2+0x_3-4ax_4+f_4,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_i&=-\frac{1}{i}x_{i-1}+0x_i-(i+1)ax_{i+1}+f_i,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned} \qquad (46)$$

Эту систему целесообразно представить в более наглядном векторном виде:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -3a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & -4a & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{i} & 0 & -(i+1)a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \end{bmatrix}. \quad (47)$$

Если воспользуемся обозначениями элементов матрицы системы (1), то получим

$c_{i,i-1} = -\frac{1}{i-1}$, $c_{i,i+1} = -ia$, а все остальные элементы матрицы равны нулю.

Условие регулярности (11)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| c_{i,k} \right| < 1,\ i = 1,2,...,\infty$$

в нашем случае не выполняется, т.к. имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| c_{i,k} \right| = \frac{1}{i} + (i+1)a,\ i = 1,2,...,\infty .$$

Таким образом, наша система (47) изначально не является регулярной. Теория таких систем не разработана, поэтому нужно попытаться преобразовать систему так, чтобы она стала регулярной.

Применим к (43) замену переменной $z = \frac{dx}{dt}$. Тогда получим

$$az + \int z dt + \int \left(\int z dt \right) dt = f(\tau). \quad (48)$$

Решение ищем, как и раньше, в виде ряда Маклорена:

$$z = \sum_{i=0}^{\infty} x_i t^i,\ \int z dt = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z_i}{i+1} t^{i+1},$$

$$\int \left(\int z dt \right) dt = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z_i}{(i+1)(i+2)} t^{i+2}.$$

Подставив эти выражения в (48), после должных преобразований получим

$$az_0 + (z_0 + az_1)t + \sum_{i=2}^{\infty} \left[\frac{z_{i-2}}{(i-1)i} + \frac{z_{i-1}}{i} + az_i \right] t^i = \sum_{i=0}^{\infty} f_i t^i. \quad (49)$$

Как и ранее, выбирая слагаемые с множителем t^i при определенном i, получим бесконечную систему уравнений, канонический вид которой следующий:

$$\begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ x_5 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1-a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2 \cdot 3} & -\frac{1}{3} & 1-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3 \cdot 4} & -\frac{1}{4} & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4 \cdot 5} & -\frac{1}{5} & 1-a \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ \vdots \end{bmatrix}. \quad (50)$$

Эта система является регулярной только при $a = 1$ и является квазирегулярной при $0 < a < 2$. В этих пределах параметра a конечное число уравнений системы не удовлетворяет условию регулярности, остальные же удовлетворяют. Чем ближе a к нулю или двум, тем большее число уравнений не удовлетворяет условию регулярности.

Если к (48) применить замену переменной $z = \int v dt$, то, выполнив нужные преобразования по предыдущему образцу, получим вместо (50) бесконечную систему

$$\begin{vmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1-\frac{a}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2\cdot 3} & -\frac{1}{2\cdot 3} & 1-\frac{a}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} & -\frac{1}{3\cdot 4} & 1-\frac{a}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} & -\frac{1}{4\cdot 5} & 1-\frac{a}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4\cdot 5\cdot 6} & -\frac{1}{5\cdot 6} & 1-\frac{a}{6} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ \vdots \end{vmatrix}.$$

Эта система, как и предыдущая, является квазирегулярной в области $0 < a < 2$, но расположена ближе к регулярности, чем предыдущая. Можно применять метод редукции к этим системам при условии $0 < a < 2$. То же относится и к эквивалентной им системе (47), несмотря на то, что последняя не является регулярной (но является равнозначной квазирегулярным системам).

Заключение

1. На примере анализа вынужденных колебаний в последовательном контуре показано, что в случае его возмущения произвольной э.д.с. решение получается в виде бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

2. СЛАУ, которую невозможно привести к регулярному или нормальному виду, можно решить приближенными методами. Однако, в подобных случаях требуется обоснование корректности решения, например, экспериментальной проверкой, что требует дополнительных ресурсов.

3. В абстрактной математической теории доказательство сходимости бесконечных СЛАУ не всегда возможно из-за отсутствия предварительной информации об их решениях. В радиотехнических задачах из физических соображений можно извлечь некоторые сведения о возможном результате, не прибегая к СЛАУ. Это несколько упрощает, но не решает вытекающие из практики задачи анализа.

Таким образом обоснованное применение метода бесконечных СЛАУ при анализе вынужденных колебаний в радиотехнических системах целесообразно, однако требует обязательного рассмотрения вопроса сходимости.

Литература

1. *Канторович Л.В.* Приближенные методы высшего анализа / Л.В. Канторович, В.И. Крылов. – М.–Л. : Госфизматиздат, 1962. – 708 с.

2. *Каган В.Ф.* Основания теории определителей / В.Ф. Каган. – Одесса: Госиздат Украины, 1922. – 522 с.

3. *Лучинин Д.И.* Метод бесконечных систем в приближении к решению плоской задачи теории упругости / Д.И. Лучинин // Математический сборник. – 1938. – Т. 3(45). – №3. – С. 483–505.

4. *Бондаренко П.С.* К вопросу о единственности для бесконечных систем линейных уравнений / П.С. Бондаренко // Математический сборник. – 1951. – Т. 29(71). – №2. – С. 403–418.

5. *Сапонджян О.М.* Применение метода дополнительных воздействий к решению задачи об изгибе плит, плоской задачи и задачи о кручении призматических стержней / О.М. Сапонджян // Прикладная математика и механика. – 1949. – Т. 13. – Вып.5. – С. 501–512.

6. *Абрамян Б.Л.* Кручение призматических стержней с крестообразным поперечным сечением / Б.Л. Абрамян // Прикладная математика и механика. – 1949. – Т. 13. – Вып.5. – С. 551–556.

7. *Абрамян Б.Л.* Кручение и изгиб призматических стержней с полым прямоугольным сечением / Б.Л. Абрамян // Прикладная математика и механика.– 1950. – Т. 14. – Вып.3. – С. 265–276.

8. *Абрамян Б.Л.* К плоской задаче теории упругости для прямоугольника / Б.Л. Абрамян // Прикладная математика и механика. – 1957. – Т. 21. – Вып.1 – С. 89–100.

9. *Сабсович Л.Л.* Вычисление одного определителя, имеющего приложение в теории уравнения Матье / Л.Л. Сабсович // Прикладная математика и механика. – 1957. – Т. 21. –Вып.1. – С. 145–152.

Получено 22.02.07г.

УДК621.39:517.3.

УСЛОВИЯ СТРЕМЛЕНИЯ К НУЛЮ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ИНТЕГРАЛОВ ВЕРОЯТНОСТИ СО СТЕПЕННЫМИ И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Н.Е. КОРОТКОВ

Приведены наиболее широкие (необходимые и достаточные) условия стремления произведений интегралов вероятности со степенными и показательными функциями к нулю при стремлении независимой переменной к бесконечности на комплексной плоскости, необходимые для формулирования расширенных условий сходимости несобственных интегралов, связанных с интегралами вероятности.

В статистической радиотехнике, в теории связи и управления, а также в других отраслях прикладных наук, часто встречаются интегралы с содержанием произведений интегралов вероятности со степенными и экспоненциальными функциями. Классу таких интегралов посвящалась книга автора [1], некоторые из них имеются в [2–5]. Однако условия сходимости их несобственных форм выявлены недостаточно полно. Они определяются условиями стремления произведений указанных видов к нулю при приближении переменной интегрирования к бесконечности. Поэтому здесь ставится задача получения таких условий – категории необходимых и достаточных (теоретически наиболее широких) – с целью обеспечения возможности расширения условий сходимости несобственных интегралов данного класса. С учетом распространённости методов комплексного анализа в прикладных науках в общем случае здесь будем иметь в виду комплексные значения как независимой переменной z, так и всех непрерывных параметров рассматриваемых произведений. От получаемых при этом результатов впоследствии легко перейти к частным случаям действительных значений переменной и каждого непрерывного параметра по отдельности или их всех, следовательно, к соответствующим произведениям в действительной области. Символом «∞» будем обозначать бесконечность на комплексной плоскости (положительную и отрицательную бесконечности на оси действительных чисел – соответственно «$+\infty$» и «$-\infty$»), а стремление z к бесконечности по любой траектории T на комплексной плоскости будем выражать в виде «$z \to \infty$». Точка «бесконечность» в области определения рассматриваемых функций и интегралов вероятности не входит, что, однако, не исключает возможности определения тех или иных пределов при $z \to \infty$.

Обобщённо рассматриваемые произведения можно представить (согласно определению натурального логарифма от комплексного числа) в виде

$$z^n \exp\left(\eta z^2 + \lambda z + \rho\right) \prod_{k=1}^{m} \operatorname{erf}^{n_k}\left(\lambda_k z + \rho_k\right) \times$$

$$\times \prod_{k=m+1}^{m+l} \operatorname{erfi}^{n_k}\left(\lambda_k z + \rho_k\right) =$$

$$= \exp\left[\eta z^2 + \lambda z + \rho + n \ln z + f(z)\right], \qquad (1)$$

где $$f(z) = \sum_{k=1}^{m} n_k \ln \operatorname{erf}\left(\lambda_k z + \rho_k\right) +$$

$$+ \sum_{k=m+1}^{m+l} n_k \ln \operatorname{erfi}\left(\lambda_k z + \rho_k\right)\Bigg],$$

n, m, l – любые целые неотрицательные числа, n_k – произвольные натуральные числа, параметры η, λ, ρ, λ_k, ρ_k и независимая переменная z могут быть и комплексными, и действительными (λ_k и хотя бы один из η, λ не равны нулю), $\operatorname{erf}(\theta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\theta} \exp\left(-t^2\right) dt$ и $\operatorname{erfi}(\theta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\theta} \exp\left(t^2\right) dt$ – разновидности интеграла вероятности [4]. Применительно к действительной области $\operatorname{erfi}(\theta)$ называется интегралом вероятности мнимого аргумента. В принципе он здесь вводится только с учётом необходимости перехода в действительную область: в комплексной было бы достаточно представление $\operatorname{erfi}(\theta) = -i \operatorname{erf}(i\theta)$,

следующее из определений разновидностей интеграла вероятности. В (1) действие первого знака перемножения распространяется только до другого такого знака. Там же и ниже аналогичное замечание имеется в виду и по отношению к следующим друг за другом знакам суммирования.

Для стремления комплексной функции к нулю при $z \to \infty$ необходимо и достаточно стремление её модуля к нулю, что для экспоненциальной функции в правой части (1) эквивалентно стремлению к $-\infty$ действительной части показателя (выражения в квадратных скобках). Действительная часть логарифма комплексного числа равна логарифму его модуля, поэтому необходимое и достаточное условие стремления (1) к нулю при $z \to \infty$ в исходной форме записывается в виде

$$\lim_{z\to\infty}\left[\operatorname{Re}\left(\eta z^2+\lambda z\right)+n\ln|z|+\right.$$

$$+\sum_{k=1}^{m} n_k \ln\left|\operatorname{erf}\left(\lambda_k z+\rho_k\right)\right|+$$

$$\left.+\sum_{k=m+1}^{m+l} n_k \ln\left|\operatorname{erfi}\left(\lambda_k z+\rho_k\right)\right|\right]=-\infty, \qquad (2)$$

где величина Reρ опущена, так как она с точки зрения бесконечного предела роли не играет. Эта формулировка, конечно, практически неприемлема из-за необходимости вычисления логарифмов модулей интегралов вероятности, что требует перехода к другим, удобным для пользования, формулировкам. Такие формулировки, которые были приведены в [1], несколько жёстче, то есть выражают только достаточные условия стремления рассматриваемых произведений к нулю. Дальнейшие исследования, проведенные в [6,7], предоставили возможность получения простых, но полностью соответствующих (2) формулировок интересующих условий. Из результатов этих исследований здесь будем использовать необходимое и достаточное условие сходимости интеграла вероятности $\operatorname{erf}(\theta)$ с его предельной формулой и предельную оценку $|\operatorname{erf}(\theta)|$. Более обобщённо – для $\operatorname{erf}(\alpha z+\beta)$ – указанное условие можно записать в виде

$$\lim_{z\to\infty}\left[\operatorname{Re}\left(\alpha^2 z^2+2\alpha\beta z\right)+\ln|z|\right]=+\infty, \qquad (3)$$

предельную формулу – в виде

$$\lim_{z\to\infty}\operatorname{erf}(\alpha z+\beta)=$$

$$=\pm 1\left\{\lim_{z\to\infty}\left[\operatorname{Re}\left(\alpha^2 z^2+2\alpha\beta z\right)+\ln|z|\right]=\right.$$

$$\left.=+\infty,\ \lim_{z\to\infty}\operatorname{Re}(\alpha z)=\pm\infty\right\}, \qquad (4)$$

а оценку по модулю представить неравенством

$$\frac{\left|\operatorname{erf}(\alpha z+\beta)\right|}{\exp\left[-\operatorname{Re}\left(\alpha^2 z^2+2\alpha\beta z\right)\right]}\le\frac{N}{|z|}\left\{\operatorname{Re}\left(\alpha^2 z^2+2\alpha\beta z\right)+\right.$$

$$\left.+\ln|z| \text{ ограничена сверху при } z\to\infty\right\}, \qquad (5)$$

где N – некоторое конечное положительное число (его значение с точки зрения поставленной задачи роли не играет). Заметим, что для удобства здесь произведены замены полагающихся при подстановке $\theta=\alpha z+\beta$ величин $\operatorname{Re}\left(\alpha^2 z^2+2\alpha\beta z+\beta^2\right)$, $\ln|\alpha z+\beta|$ и $\operatorname{Re}(\alpha z+\beta)$ соответственно на $\operatorname{Re}\left(\alpha^2 z^2+2\alpha\beta z\right)$, $\ln|z|$ и $\operatorname{Re}(\alpha z)$. Указанные замены допустимы ввиду равноценности заменяющих и заменяемых величин (в каждой паре) с точки зрения выполнения и невыполнения (3), а также оговоренных в фигурных скобках условий применимости (4),(5). Кроме того, неравенство (5) записано с заменой величины $|\alpha z+\beta|$ на $|z|$, поскольку их отношение при $z \to \infty$ остаётся конечным, а конкретное значение N в (5) не регламентируется (соответствующее неравенство может сохраняться и при такой замене подбором подходящего значения N). Далее сумму $\operatorname{Re}\left(\alpha^2 z^2+2\alpha\beta z\right)+\ln|z|$ будем называть контрольной величиной для интеграла вероятности $\operatorname{erf}(\alpha z+\beta)$.

Исходя из (3)–(5), с переходом от параметров α и β соответственно к $i\alpha$ и $i\beta$ можно записать также соответствующие предельные характеристики для $\operatorname{erfi}(\alpha z+\beta)=-i\operatorname{erf}(i\alpha z+i\beta)$:
необходимое и достаточное условие сходимости

$$\lim_{z\to\infty}\left[\operatorname{Re}\left(\alpha^2 z^2+2\alpha\beta z\right)-\ln|z|\right]=-\infty, \qquad (6)$$

предельную формулу

$$\lim_{z\to\infty}\operatorname{erfi}(\alpha z+\beta)=$$

$$= \pm i \left\{ \lim_{z\to\infty} \left[\mathrm{Re}\left(\alpha^2 z^2 + 2\alpha\beta z\right) - \ln|z| \right] = \right.$$

$$\left. = -\infty, \lim_{z\to\infty} \mathrm{Im}(\alpha z) = \pm\infty \right\}, \qquad (7)$$

оценку модуля

$$\frac{\left|\mathrm{erfi}\ (\alpha z + \beta)\right|}{\exp\left[\mathrm{Re}\left(\alpha^2 z^2 + 2\alpha\beta z\right)\right]} \le \frac{N}{|z|} \left\{ \mathrm{Re}\left(\alpha^2 z^2 + 2\alpha\beta z\right) - \right.$$

$$\left. - \ln|z| \text{ ограничена снизу при } z \to \infty \right\}. \qquad (8)$$

Контрольной величиной для $\mathrm{erfi}(\alpha z + \beta)$ будем называть величину $\ln|z| - \mathrm{Re}\left(\alpha^2 z^2 + 2\alpha\beta z\right)$.

Начнём с исследования простейшего случая $m = 1$, $l = 0$ в (1). Соответствующее произведение можно представить равенством

$$z^n \exp\left(\eta z^2 + \lambda z + \rho\right) \mathrm{erf}^{n_1}\left(\lambda_1 z + \rho_1\right) =$$

$$= \exp\left[\eta z^2 + \lambda z + \rho + n \ln z + n_1 \ln \mathrm{erf}\left(\lambda_1 z + \rho_1\right) \right]. \qquad (9)$$

Для него исходная запись необходимого и достаточного условия (2) стремления к нулю при $z\to\infty$ принимает частный вид

$$\lim_{z\to\infty} \left[\mathrm{Re}\left(\eta z^2 + \lambda z\right) + n \ln|z| + n_1 \ln\left|\left(\lambda_1 z + \rho_1\right)\right| \right] =$$

$$= -\infty. \qquad (10)$$

Если для интеграла вероятности $\mathrm{erf}\left(\lambda_1 z + \rho_1\right)$ выполняется необходимое и достаточное условие сходимости согласно (3), то есть он сходится, справедлива предельная формула (4), тогда контрольная величина $\mathrm{Re}\left(\lambda_1^2 z^2 + 2\lambda_1\rho_1 z\right) + \ln|z|$ для этого интеграла вероятности при $z\to\infty$ стремится к $+\infty$, его модуль $\left|\mathrm{erf}\left(\lambda_1 z + \rho_1\right)\right|$ – к единице, логарифм последнего – к нулю.

В соответствии с [6] в случае ограниченной сверху и снизу указанной контрольной величины ограничены также $\left|\mathrm{erf}\left(\lambda_1 z + \rho_1\right)\right|$ и $\ln\left|\mathrm{erf}\left(\lambda_1 z + \rho_1\right)\right|$ (при $z\to\infty$), хотя $\mathrm{erf}\left(\lambda_1 z + \rho_1\right)$ тогда расходится. Так, например, окажется, если z будет уходить в бесконечность по линиям, называемым далее разделительными, отображающимся в виде кривых с уравнениями $y_1 = x_1 + \ln x_1/(2x_1)$ и $y_1 = -x_1 - \ln x_1/(2x_1)$ для $x_1 > 1$ на плоскости z_1, получаемой линейным преобразованием плоскости z согласно равенству $z_1 = \lambda_1 z + \rho_1$. Эти уравнения также следуют из изложенного в [6]. Указанные линии на плоскости z асимптотически приближаются к взаимоперпендикулярным границам сектора (с двух его внешних сторон), называемого согласно [1] рабочим сектором для $\mathrm{erf}\left(\lambda_1 z + \rho_1\right)$, являющегося, в свою очередь, отображением на плоскости z сектора $\pm\pi/4$ плоскости z_1. С учетом равенств $z = x + iy$ и $z_1 = x_1 + iy_1$ несложно получить параметрические уравнения для координат x и y разделительных линий и на самой плоскости z, принимая x_1 за параметр. Для этого от пары равенств $x_1 = x\,\mathrm{Re}\,\lambda_1 - y\,\mathrm{Im}\,\lambda_1 + \mathrm{Re}\,\rho_1$, $y_1 = x\,\mathrm{Im}\,\lambda_1 + y\,\mathrm{Re}\,\lambda_1 + \mathrm{Im}\,\rho_1$, вытекающих из преобразования вида $z_1 = \lambda_1 z + \rho_1$, осуществляется переход к другой паре равенств

$$x = \frac{x_1\,\mathrm{Re}\,\lambda_1 + y_1\,\mathrm{Im}\,\lambda_1 - \mathrm{Re}\,\lambda_1\,\mathrm{Re}\,\rho_1 - \mathrm{Im}\,\lambda_1\,\mathrm{Im}\,\rho_1}{\mathrm{Re}^2\,\lambda_1 + \mathrm{Im}^2\,\lambda_1},$$

$$y = \frac{y_1\,\mathrm{Re}\,\lambda_1 - x_1\,\mathrm{Im}\,\lambda_1 + \mathrm{Im}\,\lambda_1\,\mathrm{Re}\,\rho_1 - \mathrm{Re}\,\lambda_1\,\mathrm{Im}\,\rho_1}{\mathrm{Re}^2\,\lambda_1 + \mathrm{Im}^2\,\lambda_1}$$

с подстановкой далее в них $y_1 = x_1 + \ln x_1/(2x_1)$ для первой разделительной линии, $y_1 = -x_1 - \ln x_1/(2x_1)$ – для второй. С использованием полученных выражений для x и y можно убедиться в стремлении указанной контрольной величины к конечному пределу при движении z к бесконечности по каждой разделительной линии (то есть при стремлении к $+\infty$ их параметра x_1).

Подобными разделительными линиями с обеих сторон можно снабдить и другой рабочий сектор (противоположный рассмотренному) для $\mathrm{erf}\left(\lambda_1 z + \rho_1\right)$. Тогда всего их на комплексной плоскости для одного интеграла вероятности окажется четыре. Такие линии будут востребованы и ниже. Однако в фактическом проведении разделительных линий здесь нет необходимости (важна лишь возможность проведения их на комплексной плоскости).

В соответствии с изложенным при любой ограниченной снизу контрольной величине – с учётом ограниченности её снизу и при стремлении к $+\infty$ – для интеграла вероятности $\mathrm{erf}\left(\lambda_1 + \rho_1\right)$ независимо от выполнения или невыполнения необходимого и достаточного условия его сходимости исходная формулировка (10) искомого условия стремления произведения (9) к нулю сводится к условию (назовем его первым частичным услови-

ем), оказывающемуся одинаковым с необходимым и достаточным условием стремления к нулю произведения $z^n \exp\left(\eta z^2 + \lambda z + \rho\right)$ при $z \to \infty$

$$\lim_{z\to\infty}\left[\operatorname{Re}\left(\eta z^2 + \lambda z\right) + n\ln|z|\right] = -\infty, \qquad (11)$$

приведенным в [1], поскольку любые конечные значения $\ln\left|\operatorname{erf}\left(\lambda_1 + \rho_1\right)\right|$, нулевое и ненулевые, с точки зрения бесконечного предела роли не играют.

Если указанная контрольная величина при $z \to \infty$ стремится к $-\infty$, согласно [6] интеграл вероятности $\operatorname{erf}\left(\lambda_1 z + \rho_1\right)$ расходится так, что его модуль неограниченно возрастает, однако не превышает величины $N\exp\left[-\operatorname{Re}\left(\lambda_1^2 z^2 + 2\lambda_1\rho_1 z\right)\right]\Big/|z|$, следующей из неравенства (5). В соответствии с дополнительными исследованиями, проведенными в [7], результат деления $\left|\operatorname{erf}\left(\lambda_1 + \rho_1\right)\right|$ на $\exp\left[-\operatorname{Re}\left(\lambda_1^2 z^2 + 2\lambda_1\rho_1 z\right)\right]\Big/|z|$ при $z \to \infty$ оказывается ограниченным сверху, но и не может стремиться к нулю, если контрольная величина ограничена сверху (включая и её стремление к $-\infty$). Тогда $\ln\left|\operatorname{erf}\left(\lambda_1 z + \rho_1\right)\right|$ в исходном условии (10), видоизменяя лишь форму его записи, можно заменить на натуральный логарифм отношения $N\exp\left[-\operatorname{Re}\left(\lambda_1^2 z^2 + 2\lambda_1\rho_1 z\right)\right]$ к $|z|$, равный $\ln N - \ln|z| - \operatorname{Re}\left(\lambda_1^2 z^2 + 2\lambda_1\rho_1 z\right)$. Таким образом, в данном случае это условие сводится ко второму частичному условию (конечная величина $\ln N$ не учитывается ввиду её безразличности с точки зрения бесконечного предела)

$$\lim_{z\to\infty}\left[\operatorname{Re}\left(\eta z^2 + \lambda z\right) - n_1 \operatorname{Re}\left(\lambda_1^2 z^2 + 2\lambda_1\rho_1 z\right) + \right.$$
$$\left. + \left(n - n_1\right)\ln|z|\right] = -\infty. \qquad (12)$$

Если бы упомянутый результат деления при $z \to \infty$ стремился к нулю, не исключалась бы возможность выполнения (10) иногда и в случаях невыполнения такого частичного условия, потому последнее являлось бы лишь достаточным.

Кстати, (12) согласно [7] справедливо и для случаев расходимости данного интеграла вероятности с ограниченной с обеих сторон контрольной величиной, когда фактически оказывается равносильным с (11). Более того, в случаях, оговоренных выше для (11), всегда выполняется и условие (12), так как в последнем выражение под знаком предела получается вычитанием из такого выражения в (11) числа, равного умноженной на $n_1 > 0$ контрольной величине, оказывающегося тогда ограниченным сверху и снизу или стремящимся к $+\infty$, а в случаях, оговоренных для (12), выполняется также условие (11), поскольку в таких случаях упомянутое выражение в нем получается из соответствующего выражения в (12) добавлением к нему какого-то конечного или стремящегося к $-\infty$ числа. Другими словами, во всех указанных случаях всегда при выполнении (10) выполняются оба частичных условия (11), (12), и, наоборот, при выполнении их обоих выполняется и (10), а невыполнение хотя бы одного из них означает и невыполнение (10), следовательно, требование одновременного выполнения (11), (12) эквивалентно (10): выполнение этого требования является необходимым и достаточным условием стремления к нулю произведения (9) при $z \to \infty$.

В остальных случаях, когда контрольная величина для $\operatorname{erf}\left(\lambda_1 z + \rho_1\right)$ не стремится к $-\infty$, как к пределу, но и не ограничена снизу, то есть траектория T движения z к бесконечности имеет сложную форму, например, колебательную, зигзагообразную или петлеобразную, и пересекает хотя бы одну из четырёх разделительных линий бесконечное число раз, то из совокупности участков этой траектории, находящихся между соседними разделительными линиями, соединяя такие участки смежными участками пересекаемых разделительных линий, можно образовать не менее двух производных траекторий (точки пересечений можно относить к любой из двух производных траекторий). Если производная траектория находится в области между двумя разделительными линиями (включающей и сами эти граничные линии), охватывающими какой-то рабочий сектор с обеих сторон, то удовлетворяет необходимому и достаточному условию (11) стремления рассматриваемого произведения на ней к нулю. Для остальных производных траекторий оно сводится к (12). При движении в бесконечность по рассматриваемой сложной траектории точка z переходит от одних производных траекторий к другим. Следовательно, для самой интересующей сложной траектории T указанное условие также оказывается равноценным сочетанию (11) с (12).

Таким образом, для любых траекторий стремления z к бесконечности частичные условия (11) и (12) совместно представляют универсальное необходимое и достаточное условие стремления произ-

ведения $z^n \exp\left(\eta z^2 + \lambda z + \rho\right)\mathrm{erf}^{n_1}\left(\lambda_1 z + \rho_1\right)$ к нулю при $z \to \infty$.

Изложенным способом, используя предельные свойства другой разновидности интеграла вероятности согласно (6)–(8), приходим также к подобной формулировке необходимого и достаточного условия стремления к нулю простого произведения $z^n \exp\left(\eta z^2 + \lambda z + \rho\right)\mathrm{erfi}^{n_1}\left(\lambda_1 z + \rho_1\right)$ (для $m = 0$, $l = 1$) в виде сочетания первого частичного условия (11) с аналогом второго частичного условия

$$\lim_{z\to\infty}\Big[\,\mathrm{Re}\left(\eta z^2 + \lambda z\right) + n_1\,\mathrm{Re}\left(\lambda_1^2 z^2 + 2\lambda_1\rho_1 z\right) + \\ + \left(n - n_1\right)\ln\left|z\right|\,\Big] = -\infty\,. \qquad (13)$$

Заметим, что последний проще получается косвенно, способом замены λ_1 и ρ_1 в (12) соответственно на $i\lambda_1$ и $i\rho_1$ – на основании соотношения $\mathrm{erfi}\left(\lambda_1 z + \rho_1\right) = -i\mathrm{erf}\left(i\lambda_1 z + \rho_1\right)$ (коэффициент $-i$ для интересующих здесь модулей не имеет значения). К такому способу будем прибегать и ниже.

Теперь перейдем к случаю $m = 2$, $l = 0$, то есть к более сложному произведению вида $z^n \exp\left(\eta z^2 + \lambda z + \rho\right)\mathrm{erf}^{n_1}\left(\lambda_1 z + \rho_1\right)\mathrm{erf}^{n_2}\left(\lambda_2 z + \rho_2\right)$. Для него согласно (2) исходная формулировка необходимого и достаточного условия стремления к нулю при $z \to \infty$ записывается как

$$\lim_{z\to\infty}\Big[\,\mathrm{Re}\left(\eta z^2 + \lambda z\right) + n\ln\left|z\right| + n_1\ln\left|\mathrm{erf}\left(\lambda_1 z + \rho_1\right)\right| + \\ + n_2\ln\left|\mathrm{erf}\left(\lambda_2 z + \rho_2\right)\right|\,\Big] = -\infty\,. \qquad (14)$$

Если сходятся оба интеграла вероятности $\mathrm{erf}\left(\lambda_1 z + \rho_1\right)$ и $\mathrm{erf}\left(\lambda_2 z + \rho_2\right)$ или, по крайней мере, оказываются ограниченными их модули при $z \to \infty$, и это условие с учётом вышеизложенного сводится к первому частичному условию (11). При таком же втором интеграле вероятности и стремлении модуля первого к бесконечности описанным методом от (14) в соответствии с [6,7] приходим ко второму частичному условию (12), а если поменять местами свойства этих интегралов вероятности, то (14) переходит в третье частичное условие

$$\lim_{z\to\infty}\Big[\,\mathrm{Re}\left(\eta z^2 + \lambda z\right) - n_2\,\mathrm{Re}\left(\lambda_2^2 z^2 + 2\lambda_2\rho_2 z\right) + \\ + \left(n - n_2\right)\ln\left|z\right|\,\Big] = -\infty\,. \qquad (15)$$

Если модули обоих интегралов вероятности при $z \to \infty$ возрастают неограниченно, то от (14) так же приходим к четвёртому частичному условию

$$\lim_{z\to\infty}\Big[\,\mathrm{Re}\left(\eta z^2 + \lambda z\right) - n_1\,\mathrm{Re}\left(\lambda_1^2 z^2 + 2\lambda_1\rho_1 z\right) - \\ - n_2\,\mathrm{Re}\left(\lambda_2^2 z^2 + 2\lambda_2\rho_2 z\right) + \\ + \left(n - n_1 - n_2\right)\ln\left|z\right|\,\Big] = -\infty\,. \qquad (16)$$

Обратим внимание, что в каждом из рассмотренных здесь четырех случаев выполнение соответствующего ему частичного условия и (14) сопровождается выполнением также трех других частичных условий. С другой стороны, выполнение (14) невозможно при невыполнении хотя бы одного из частичных условий (11), (12), (15) и (16) (в этом легко убедиться, перебирая различные сочетания свойств интегралов вероятности в рассматриваемом произведении – в смысле стремления их контрольных величин к $-\infty$ или ограниченности последних снизу). Следовательно, указанная совокупность частичных условий в любом из четырех случаев эквивалентно исходному условию (14). Далее аналогично вышеизложенному (с обращением к разделительным линиям для обоих интегралов вероятности) такой вывод распространяется и на стремление точки z к бесконечности по сложным траекториям T на комплексной плоскости, когда контрольная величина хотя бы одного интеграла вероятности в рассматриваемом произведении не стремится к $-\infty$, как к пределу, но и не ограничена снизу. Таким образом, указанная совокупность является универсальным необходимым и достаточным условием стремления к нулю рассмотренного произведения с двумя интегралами вероятности при $z \to \infty$.

С учетом соотношения между $\mathrm{erf}(\theta)$ и $\mathrm{erfi}(\theta)$ от сформулированного условия для рассмотренного произведения с содержанием двух интегралов вероятности легко перейти к условиям стремления при $z \to \infty$ к нулю произведений, получаемых из указанного заменой в нём второго интеграла вероятности на $\mathrm{erfi}\left(\lambda_2 z + \rho_2\right)$ и одновременной заменой обоих – на $\mathrm{erfi}\left(\lambda_1 + \rho_1\right)$ и $\mathrm{erfi}\left(\lambda_2 + \rho_2\right)$. В первом из этих двух случаев приходим к необходимому и достаточному условию стремления образовавшегося произведения к нулю при $z \to \infty$ в виде совокупности частичных условий (11), (12) и таких условий, получаемых из (15), (16) косвенно (см. соответствующее замеча-

ние, сделанное выше) заменой лишь знака «–» перед $n_2 \operatorname{Re}\left(\lambda_2^2 z^2 + 2\lambda_2\rho_2 z\right)$ в них на «+», а во втором случае – в виде совокупности (11) с тремя другими частичными условиями, получаемыми из (12), (15), (16) заменой в них знаков перед $n_1 \operatorname{Re}\left(\lambda_1^2 z^2 + 2\lambda_1\rho_1 z\right)$ и $n_2 \operatorname{Re}\left(\lambda_2^2 z^2 + 2\lambda_2\rho_2 z\right)$ на противоположные.

Описанным методом можно получать аналогичные формулировки (с учётом излагаемого ниже назовём их развёрнутыми формулировками) необходимых и достаточных условий стремления при $z \to \infty$ к нулю для любых произведений вида (1). Эти условия будут представляться совокупностями частичных условий, соответствующих различным сочетаниям свойств контрольных величин отдельных интегралов вероятности (обеих разновидностей), содержащихся в интересующем произведении. Но общее число таких условий равно 2^{m+l} и с ростом суммы $m+l$ резко увеличивается. Поэтому в случаях больших значений этой суммы целесообразно переходить к компактной (свернутой) форме представления необходимого и достаточного условия стремления произведений вида (1) к нулю при $z \to \infty$

$$\lim_{z\to\infty}\left[\operatorname{Re}\left(\eta z^2 + \lambda z\right) + s\ln|z| - \right.$$

$$-\sum_{k=1}^{m} m_k \operatorname{Re}\left(\lambda_k^2 z^2 + 2\lambda_k\rho_k z\right) +$$

$$\left. + \sum_{k=m+1}^{m+l} r_k \operatorname{Re}\left(\lambda_k^2 z^2 + 2\lambda_k\rho_k z\right)\right] = -\infty, \qquad (17)$$

где $s = n - \sum_{k=1}^{m} m_k - \sum_{k=m+1}^{m+l} r_k$, $m_k = n_k$ при $\operatorname{Re}\left(\lambda_k^2 z^2 + 2\lambda_k\rho_k z\right) + \ln|z| < 0$, $m_k = 0$ при $\operatorname{Re}\left(\lambda_k^2 z^2 + 2\lambda_k\rho_k z\right) + \ln|z| \ge 0$, $r_k = n_k$ при $\operatorname{Re}\left(\lambda_k^2 z^2 + 2\lambda_k\rho_k z\right) - \ln|z| > 0$, $r_k = 0$ при $\operatorname{Re}\left(\lambda_k^2 z^2 + 2\lambda_k\rho_k z\right) - \ln|z| \le 0$.

Свернутое представление следует непосредственно из исходной формулировки (2) искомого условия. Действительно, в (1) на основании вышеизложенного $n_k \ln\left|\operatorname{erf}\left(\lambda_k z + \rho_k\right)\right|$ можно заменять на $-n_k\left[\operatorname{Re}\left(\lambda_k^2 z^2 + 2\lambda_k\rho_k z\right) + \ln|z|\right]$, если контрольная величина $\operatorname{Re}\left(\lambda_k^2 z^2 + 2\lambda_k\rho_k z\right) + \ln|z|$ соответствующего интеграла вероятности $\operatorname{erf}\left(\lambda_k z + \rho_k\right)$ при $z \to \infty$ стремится к $-\infty$, на нуль – при стремлении этой величины к $+\infty$. Оба варианта замены фактически оказываются эквивалентными друг другу, если указанная величина остаётся всюду ограниченной сверху и снизу. Поэтому используемое в (17) правило отнесения и конечных, и бесконечных её отрицательных значений к случаям допустимости первого варианта замены, а всех неотрицательных – второго, очевидно, с точки зрения бесконечного предела в исходном условии (2) сущности последнего не противоречит. К подобному правилу можно прийти также для отнесения отрицательных и неотрицательных (как бесконечных, так и конечных) значений контрольной величины $\ln|z| - \operatorname{Re}\left(\lambda_k^2 z^2 + 2\lambda_k\rho_k z\right)$ для интеграла вероятности разновидности $\operatorname{erfi}\left(\lambda_k z + \rho_k\right)$ в (1) к соответствующим случаям, когда в условии (2) $n_k \ln\left|\operatorname{erfi}\left(\lambda_k z + \rho_k\right)\right|$ можно заменять на $n_k\left[\operatorname{Re}\left(\lambda_k^2 z^2 + 2\lambda_k\rho_k z\right) - \ln|z|\right]$ и на нуль, как это сделано в (17). Таким образом, свёрнутое условие (17) равносильно исходному условию (2) (притом для любых траекторий T на комплексной плоскости), потому, как и (2), оказывается универсальным необходимым и достаточным условием стремления к нулю произведения (1) при $z \to \infty$, естественно, эквивалентным своему развёрнутому представлению совокупностью 2^{m+l} частичных условий. Например, в случае $m = 2$, $l = 0$, подробно описанном выше, к которому относилась совокупность четырех $\left(2^2 = 4\right)$ частичных условий (11), (12), (15) и (16), свернутая формулировка (17) имеет вид

$$\lim_{z\to\infty}\left[\operatorname{Re}\left(\eta z^2 + \lambda z\right) - m_1 \operatorname{Re}\left(\lambda_1^2 z^2 + 2\lambda_1\rho_1 z\right) - \right.$$

$$\left. - m_2 \operatorname{Re}\left(\lambda_2^2 z^2 + 2\lambda_2\rho_2 z\right) + \left(n - m_1 - m_2\right)\ln|z|\right] = -\infty.$$

Согласно изложенному она равносильна требованию одновременного выполнения этих четырёх частичных условий.

Свернутая запись (17) охватывает также первоначально рассмотренные простейшие частные случаи $m = 1$, $l = 0$ и $m = 0$, $l = 1$. Она формально распространяется даже на вырожденный случай $m = l = 0$ (отсутствия интегралов вероятности обеих разновидностей в произведении), обращаясь тогда в условие (11), совпадающее с

соответствующим указанным в [1] необходимым и достаточным условием для этого случая.

Множители m_k и r_k в (17) в общем случае зависят от z. Но, поскольку там рассматривается лишь предел при $z \to \infty$, в случаях наличия у них соответствующих предельных значений $m_k^{(c)}$ и $r_k^{(c)}$ последние могут использоваться вместо самих m_k и r_k – независимо от z. Эти предельные значения выбираются по следующим правилам: если контрольная величина $\mathrm{Re}\left(\lambda_k^2 z^2 + 2\lambda_k \rho_k z\right) + \ln|z|$ для $\mathrm{erf}\left(\lambda_k z + \rho_k\right)$ при $z \to \infty$ ограничена снизу, берется $m_k^{(c)} = 0$, если она стремится к $-\infty$, берется $m_k^{(c)} = n_k$, если контрольная величина $\ln|z| - \mathrm{Re}\left(\lambda_k^2 z^2 + 2\lambda_k \rho_k z\right)$ для $\mathrm{erfi}\left(\lambda_k z + \rho_k\right)$ при $z \to \infty$ ограничена снизу, принимается значение $r_k^{(c)} = 0$, а при стремлении этой величины к $-\infty$ принимается значение $r_k^{(c)} = n_k$. Такие замены могут оказаться осуществимыми и одновременно для всех $1 \le k \le m+l$ в (17), если, в частности, траектория движения точки z к бесконечности на комплексной плоскости монотонна по отношению к обеим координатам x и y хотя бы при $|x| > M_1$, $|y| > M_2$, где M_1 и M_2 – произвольные конечные положительные числа. Соответствующими примерами являются любые прямолинейные траектории (в том числе и совпадающие с осями x и y комплексной плоскости): для них указанные замены осуществимы всегда.

Напомним, что все приведенные выше условия справедливы и при равенстве нулю одного из параметров η и λ, а в случае η=λ=0 они неприменимы.

Согласно (17) в действительной области, где и независимая переменная $z = x$, и непрерывные параметры $\eta = a$, $\lambda = b$, $\rho = c$ и $\lambda_k = b_k \ne 0$, $\rho_k = c_k$ (для всех $1 \le k \le m+l$) – действительные величины, интегралы вероятности $\mathrm{erf}\left(b_k x + c_k\right)$ на условия стремления рассмотренных произведений к нулю не влияют как при $x \to +\infty$, так и при $x \to -\infty$, поскольку значения $m_k^{(c)}$ оказываются нулевыми ввиду стремления соответствующих контрольных величин к $+\infty$. В этой области, наоборот, на упомянутые условия интегралы вероятности вида $\mathrm{erfi}\left(b_k x + c_k\right)$ (от мнимых аргументов) всегда влияют, так как их контрольные величины стремятся к $-\infty$, потому оказываются равными n_k значения $r_k^{(c)}$. Так, необходимое и достаточное условие стремления к нулю произведений в действительной области $x^n \exp\left(ax^2 + bx + c\right) \times \prod_{k=1}^{m} \mathrm{erf}^{n_k}\left(b_k x + c_k\right)$ в случае $a \ne 0$ и для $x \to +\infty$, и для $x \to -\infty$ сводится к неравенству $a < 0$, а в случае $a = 0$ для $x \to +\infty$ сводится к $b < 0$, для $x \to -\infty$ – к $b > 0$ (как и при отсутствии в произведении интегралов вероятности вообще). Аналогичное условие для произведений в этой области вида $x^n \exp\left(ax^2 + bx + c\right) \prod_{k=1}^{m} \mathrm{erf}^{n_k}\left(b_k x + c_k\right) \times \prod_{k=m+1}^{m+l} \mathrm{erfi}^{n_k}\left(b_k x + c_k\right)$ имеет обобщённую формулировку «$a + \sum_{k=m+1}^{m+l} n_k b_k^2 \le 0$, при $a + \sum_{k=m+1}^{m+l} n_k b_k^2 = 0$ дополнительно: $b + 2\sum_{k=m+1}^{m+l} n_k b_k c_k < 0$ для $x \to +\infty$, $b + 2\sum_{k=m+1}^{m+l} n_k b_k c_k > 0$ для $x \to -\infty$». В частности, необходимое и достаточное условие стремления к нулю произведения $x^n \exp\left(ax^2 + bx + c\right) \times \mathrm{erfi}^{n_1}\left(b_1 x + c_1\right)$ в случае $x \to +\infty$ обобщенно записывается в виде «$a + n_1 b_1^2 \le 0$, при $a + n_1 b_1^2 = 0$ дополнительно $b + 2n_1 b_1 c_1 < 0$», а в случае $x \to -\infty$ – в виде «$a + n_1 b_1^2 \le 0$, при $a + n_1 b_1^2 = 0$ дополнительно $b + 2n_1 b_1 c_1 > 0$». Это условие и для $x^n \exp\left(ax^2 + bx + c\right) \mathrm{erfi}^{n_1}\left(b_1 x + c_1\right) \mathrm{erf}^{n_2}\left(b_2 x + c_2\right)$ будет выражаться точно так же (и для $x \to +\infty$, и для $x \to -\infty$), а для $x^n \exp\left(ax^2 + bx + c\right) \times \mathrm{erfi}^{n_1}\left(b_1 x + c_1\right) \mathrm{erfi}^{n_2}\left(b_2 x + c_2\right)$ при $x \to +\infty$ сводится к неравенству $a + n_1 b_1^2 + n_2 b_2^2 \le 0$ с дополнительным требованием $b + 2n_1 b_1 c_1 + 2n_2 b_2 c_2 < 0$ для случая $a + n_1 b_1^2 + n_2 b_2^2 = 0$, а при $x \to -\infty$ – к тому же неравенству с дополнительным требованием $b + 2n_1 b_1 c_1 + 2n_2 b_2 c_2 > 0$ для $a + n_1 b_1^2 + n_2 b_2^2 = 0$. Заметим, что все приведенные

необходимые и достаточные условия в действительной области допускают равенство нулю a или b (а при $a = b = 0$ неприменимы, кстати, формально и невыполнимы).

В заключение отметим, что задача, поставленная в вводной части настоящей статьи, выполнена. На одном простом примере проиллюстрируем использование её результатов для расширения условий сходимости несобственных интегралов. Так, в соответствии с [1] для $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_1 \neq \alpha^2$ имеет место выражение неопределенного интеграла

$$\int z\,\mathrm{erf\,i}\,(\alpha z+\beta)\exp\left(-\alpha_1 z^2\right)dz =$$

$$=\frac{1}{2\alpha_1}\left[\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha_1-\alpha^2}}\exp\left(\frac{\alpha_1\beta^2}{\alpha_1-\alpha^2}\right)\times\right.$$

$$\times\mathrm{erf}\left(\sqrt{\alpha_1-\alpha^2}\,z-\frac{\alpha\ \beta}{\sqrt{\alpha_1-\alpha^2}}\right)-$$

$$\left.-\exp\left(-\alpha_1 z^2\right)\mathrm{erf\,i}(\alpha z+\beta)\right]. \qquad (18)$$

Несобственный интеграл с пределами μ, ∞ находится как предельная форма определенного интеграла от μ до ν при $\nu\to\infty$, так что применительно к формуле Ньютона–Лейбница здесь следует найти конечный предел этого выражения при $z=\nu\to\infty$. Такая задача в общем случае не решается, поэтому воспользуемся известными пределами отдельных составляющих в (18) при $z\to\infty$. Согласно (4)

$$\lim_{z\to\infty}\mathrm{erf}\left(\sqrt{\alpha_1-\alpha^2}\,z-\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha_1-\alpha^2}}\right)=\pm 1$$

$$\left\{\lim_{z\to\infty}\left[\mathrm{Re}\left(\alpha_1 z^2-\alpha^2 z^2-2\alpha\beta z\right)+\ln|z|\right]=+\infty,\right.$$

$$\left.\lim_{z\to\infty}\mathrm{Re}\left(\sqrt{\alpha_1-\alpha^2}\,z\right)=\pm\infty\right\}, \qquad (19)$$

а согласно (11), (13) для интересующего произведения $\exp\left(-\alpha_1 z^2\right)\mathrm{erf\,i}(\alpha z+\beta)$ (соответствующего случаю $n = m = 0$, $l = n_1 = 1$)

$$\lim_{z\to\infty}\left[\exp\left(-\alpha_1 z^2\right)\mathrm{erf\,i}(\alpha z+\beta)\right]=0$$

$$\left\{\lim_{z\to\infty}\mathrm{Re}\left(\alpha_1 z^2\right)=+\infty,\right.$$

$$\left.\lim_{z\to\infty}\left[\mathrm{Re}\left(\alpha_1 z^2-\alpha^2 z^2-2\alpha\beta z\right)+\ln|z|\right]=+\infty\right\}. \qquad (20)$$

Следует подчеркнуть, что данное произведение (как и любое другое из рассмотренных выше) ни к какому конечному пределу $\sigma\neq 0$, действительному или комплексному, стремиться не может. В противном случае специальная функция $\mathrm{erf\,i}\,(\alpha z+\beta)$ при $z\to\infty$ стремилась бы к $\sigma\exp\left(\alpha_1 z^2\right)$, то есть была бы представима в пределе всего одной экспоненциальной функцией $\exp\left(\alpha_1 z^2\right)$ с не зависящим от α и β параметром α_1, что, безусловно, невозможно. Несуществование других конечных пределов, кроме нулевого, для самих экспоненциальных функций и их произведений со степенными функциями (содержащихся в составах рассмотренных здесь произведений) было установлено в [1]. Невозможность конечных пределов интеграла вероятности $\mathrm{erf}(\theta)$, не равных 1 или –1, выявлено в [6].

Исходя из выражения (18), с учётом (19) , (20) получаем формулу несобственного интеграла

$$\int_{\mu}^{\infty} z\,\mathrm{erfi}\left(\alpha z+\beta\right)\exp\left(-\alpha_1 z^2\right)dz =$$

$$=\frac{\exp\ \left(-\alpha_1\mu^2\right)}{2\alpha_1}\mathrm{erfi}\left(\alpha\mu+\beta\right)-$$

$$-\frac{\alpha}{2\alpha_1\sqrt{\alpha_1-\alpha^2}}\exp\left(\frac{\alpha_1\beta^2}{\alpha_1-\alpha^2}\right)\times$$

$$\times\left[\mathrm{erf}\left(\sqrt{\alpha_1-\alpha^2}\,\mu-\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha_1-\alpha^2}}\right)\mp 1\right]$$

$$\left\{\lim_{z\to\infty}\mathrm{Re}\left(\alpha_1 z^2\right)=+\infty,\right.$$

$$\left.\lim_{z\to\infty}\left[\mathrm{Re}\left(\alpha_1 z^2-\alpha^2 z^2-2\alpha\beta z\right)+\ln|z|\right]=+\infty,\right.$$

$$\left.\lim_{z\to\infty}\mathrm{Re}\left(\sqrt{\alpha_1-\alpha^2}\,z\right)=\pm\infty\right\}. \qquad (21)$$

Условие сходимости данного интеграла (записанное в условии применения этой формулы вместе с правилом выбора знаков в ней, выраженным при помощи бесконечного предела с двойным знаком), шире, чем определяемое согласно [1], но предварительно может приниматься только за достаточное, поскольку вместо предела первообразной функции здесь были использованы пределы отдельных её составляющих. Фактически оно является необходимым и достаточным, что было

показано в статье [8], посвященной исследованию сходимости подобных интегралов (это также подтверждает отсутствие ненулевых конечных пределов произведения, рассмотренного в данном примере). Кстати, вышеизложенное применительно к простейшему частному случаю $m = n_1 = 1$, $l = 0$ учитывалось и там.

При переходе в действительную область формула (21) принимает виды (для произвольного $-\infty < M < +\infty$):

$$\int_{M}^{+\infty} x\,\mathrm{erfi}(ax+b)\exp\left(-a_1x^2\right)dx =$$

$$= \frac{\exp\left(-a_1M^2\right)}{2a_1}\mathrm{erfi}(aM+b) +$$

$$+ \frac{a}{2a_1\sqrt{a_1-a^2}}\exp\left(\frac{a_1b^2}{a_1-a^2}\right)\times$$

$$\times\left[1-\mathrm{erf}\left(\sqrt{a_1-a^2}\,M-\frac{ab}{\sqrt{a_1-a^2}}\right)\right]\quad\left\{a_1>a^2\right\},$$

$$\int_{-\infty}^{M} x\,\mathrm{erfi}(ax+b)\exp\left(-a_1x^2\right)dx =$$

$$= \frac{a}{2a_1\sqrt{a_1-a^2}}\exp\left(\frac{a_1b^2}{a_1-a^2}\right)\times$$

$$\times\left[1+\mathrm{erf}\left(\sqrt{a_1-a^2}\,M-\frac{ab}{\sqrt{a_1-a^2}}\right)\right]-$$

$$-\frac{\exp\left(-a_1M^2\right)}{2a_1}\mathrm{erfi}(aM+b)\quad\left\{a_1>a^2\right\}.$$

Как видим, при $a_1 > a^2$ полученные действительные несобственные интегралы сходятся, хотя интеграл вероятности от мнимого аргумента в их подынтегральном выражении для любого $a \neq 0$ расходится и при $x \to +\infty$, и при $x \to -\infty$. Таких интегралов, как действительных, так и комплексных, в общедоступной литературе нет: как один из элементов условия сходимости подобных несобственных интегралов там всегда оговаривается условие сходимости интеграла вероятности под знаком интегрирования. Продемонстрированный качественно новый результат получен благодаря оценкам расходящихся интегралов вероятности согласно [1,6,7] и сформулированным здесь необходимым и достаточным условиям стремления рассмотренных произведений к нулю при стремлении независимой переменной к бесконечности.

Таким образом, и в действительной, и в комплексной областях использованием указанных оценок и полученных условий обеспечивается расширение возможностей применения интегралов представленного в [1] класса в прикладных отраслях наук, в частности, в статистической радиотехнике, теории связи и управления.

Литература

1. *Коротков Н.Е.* Интегралы для приложений интеграла вероятностей / Н.Е. Коротков. – Воронеж : ФГУП ВНИИС, 2002.

2. *Градштейн И.С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М. : Наука, 1971.

3. *Хаджи П.И.* Функция вероятностей / П.И. Хаджи ; Редакционно-издательский отдел АН Молдавской ССР. – Кишинев, 1971.

4. *Прудников А.П.* Интегралы и ряды. Элементарные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М. : Наука, 1981.

5. *Прудников А.П.* Интегралы и ряды. Специальные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М. : Наука, 1983.

6. *Коротков Н.Е.* Представление комплексного интеграла вероятности элементарными функциями при стремлении аргумента к бесконечности / Н.Е. Коротков // Теория и техника радиосвязи: науч.-техн. сб. / ВНИИС. – Воронеж, 2005. – Вып. 2. – С. 25–31.

7. *Коротков Н.Е.* Анализ предельных свойств комплексного интеграла вероятности при стремлении аргумента к бесконечности / Н.Е. Коротков // Теория и техника радиосвязи: науч.-техн. сб. / «Концерн «Созвездие». – Воронеж, 2006. – Вып. 1. – С. 44–57.

8. *Коротков Н.Е.* Сходимость несобственных интегралов от произведений интеграла вероятности со степенными и экспоненциальными функциями / Н.Е. Коротков // Теория и техника радиосвязи: науч.-техн. сб. / «Концерн «Созвездие». – Воронеж, 2006. – Вып. 2. – С. 123–137.

Получено 29.08.06г.

УДК 621.39:517.3

ИНТЕГРАЛЫ, СОДЕРЖАЩИЕ СТЕПЕННЫЕ, ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ, КОМБИНАЦИИ ИНТЕГРАЛОВ ВЕРОЯТНОСТИ, ИХ ДОПОЛНЕНИЯ ДО ПРЕДЕЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Н.Е. КОРОТКОВ

Приведены интегралы от произведений степенных и экспоненциальных функций с разностями, суммами двух интегралов вероятности или с их дополнениями до возможных предельных значений 1, –1. Для несобственных форм таких интегралов получены необходимые и достаточные условия сходимости. Экспоненциальные функции в составах указанных произведений предполагаются с показателями первой степени. Рассмотренные интегралы могут применяться и в комплексной, и в действительной областях.

Интегралы с содержанием интегралов вероятности – как в действительной, так и в комплексной областях – встречаются в различных отраслях науки и техники, в частности, в статистической радиотехнике и теории связи. Некоторые из них имеются в общедоступной литературе [1–3]. Более подробно интегралы этого класса были представлены в специализированной книге автора [4]. Но и в ней интегралам от произведений степенных и экспоненциальных функций с разностями, суммами двух интегралов вероятности или с дополнениями интегралов вероятности до их возможных предельных значений 1, –1 достаточное внимание не уделялось: не приводились неопределенные формы таких интегралов, а их несобственные формы представлялись только косвенными формулами для действительных пределов интегрирования. Целью настоящей статьи является восполнение этих упущений, предполагая пока показатели экспоненциальных функций в подынтегральных выражениях линейными (первой степени).

Неопределенные интегралы от указанных произведений, то есть их первообразные функции, можно представить согласно правилу последовательного интегрирования равенствами

$$f(z) =$$

$$= \int z^n \exp(\beta z+\gamma)\left[\operatorname{erf}(\alpha_1 z+\beta_1) \mp \operatorname{erf}(\alpha_2 z+\beta_2)\right] dz =$$

$$= F(z)\left[\operatorname{erf}(\alpha_1 z+\beta_1) \mp \operatorname{erf}(\alpha_2 z+\beta_2)\right] -$$

$$-F_1(z) \pm F_2(z), \qquad (1)$$

$$\varphi(z) = \int z^n \exp(\beta z+\gamma)\left[\pm 1 - \operatorname{erf}(\alpha_1 z+\beta_1)\right] dz =$$

$$= F(z)\left[\pm 1 - \operatorname{erf}(\alpha_1 z+\beta_1)\right] + F_1(z), \qquad (2)$$

где $F(z) = \int z^n \exp(\beta z+\gamma)\, dz$,

$$F_i(z) = \frac{2\alpha_i}{\sqrt{\pi}} \int F(z) \exp\left[-(\alpha_i z+\beta_i)^2\right] dz,$$

$\operatorname{erf}(\theta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\theta} \exp(-t^2)\, dt$ – интеграл вероятности [2], n – дискретный параметр с возможными значениями 0, 1, 2, …, а непрерывные параметры $\beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ и переменная интегрирования z могут принимать и действительные, и комплексные значения независимо друг от друга ($\beta \neq 0, \alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \neq 0,$ а также не равна нулю хотя бы одна из разностей $\alpha_1 - \alpha_2$, $\beta_1 - \beta_2$). Здесь используется объединенная запись двух вариантов выражений интегралов (а ниже также условий сходимости несобственных интегралов и условий применимости их формул) посредством двойных знаков. Один из таких вариантов соответствует выбору верхних знаков во всех двойных знаках, другой – выбору нижних знаков.

По формулам интегрирования, имеющимся в [4], получаются следующие выражения $F(z)$, $F_i(z)$ для подстановки в (1), (2):

$$F(z) = \frac{n!}{\beta} \exp(\beta z+\gamma) \sum_{m=0}^{n} \frac{z^m}{m!(-\beta)^{n-m}},$$

$$F_i(z)=\frac{2\alpha_i}{\sqrt{\pi}\beta}\sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!(-\beta)^{n-m}}\times$$

$$\times\int z^m\exp\left[-\alpha_i^2z^2+(\beta-2\alpha_i\beta_i)z+\gamma-\beta_i^2\right]dz=$$

$$=n!\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{2^m(-\beta)^{n+1-m}}\left\{\frac{2\alpha_i}{\sqrt{\pi}}\exp\left[-(\alpha_iz+\beta_i)^2+\beta z+\gamma\right]\times\right.$$

$$\times\left[\sum_{k=1}^{E(m/2)}\frac{(\beta-2\alpha_i\beta_i)^{m-2k}}{k!(m-2k)!}\sum_{l=1}^{k}\frac{l!(2\alpha_i^2z+2\alpha_i\beta_i-\beta)^{2l-1}}{(2l)!\alpha_i^{2m-2k+2l}}+\right.$$

$$+\sum_{k=1}^{m-E(m/2)}\frac{(k-1)!(\beta-2\alpha_i\beta_i)^{m+1-2k}}{(2k-1)!(m+1-2k)!}\times$$

$$\left.\left.\times\sum_{l=1}^{k}\frac{4^{k-l}(2\alpha_i^2z+2\alpha_i\beta_i-\beta)^{2l-2}}{(l-1)!\alpha_i^{2m-2k+2l}}\right]-\right.$$

$$-\exp\left(\frac{\beta^2}{4\alpha_i^2}-\frac{\beta\beta_i}{\alpha_i}+\gamma\right)\operatorname{erf}\left(\alpha_iz+\beta_i-\frac{\beta}{2\alpha_i}\right)\times$$

$$\left.\times\sum_{k=0}^{E(m/2)}\frac{(\beta-2\alpha_i\beta_i)^{m-2k}}{k!(m-2k)!\alpha_i^{2m-2k}}\right\}.$$

Здесь и ниже $E(s)$ – целая часть неотрицательного числа s (для целого числа она равна ему самому). При пользовании подобными формулами следует иметь в виду, что 0! = 1! = 1, нулевая степень любого числа, в том числе и нуля, должна приниматься за единицу, кроме того, сумма, у которой верхнее значение переменной суммирования оказывается меньше нижнего, считаться равной нулю. Так, с учетом этих замечаний и выражений $F(z)$, $F_i(z)$ из (1) и (2) следуют наиболее важные для приложений частные формулы неопределенных интегралов применительно к $n = 0$

$$\int\exp(\beta z+\gamma)\left[\operatorname{erf}(\alpha_1z+\beta_1)\mp\operatorname{erf}(\alpha_2z+\beta_2)\right]dz=$$

$$=\frac{\exp(\beta z+\gamma)}{\beta}\left[\operatorname{erf}(\alpha_1z+\beta_1)\mp\operatorname{erf}(\alpha_2z+\beta_2)\right]-$$

$$-\frac{1}{\beta}\exp\left(\frac{\beta^2}{4\alpha_1^2}-\frac{\beta\beta_1}{\alpha_1}+\gamma\right)\operatorname{erf}\left(\alpha_1z+\beta_1-\frac{\beta}{2\alpha_1}\right)\pm$$

$$\pm\frac{1}{\beta}\exp\left(\frac{\beta^2}{4\alpha_2^2}-\frac{\beta\beta_2}{\alpha_2}+\gamma\right)\operatorname{erf}\left(\alpha_2z+\beta_2-\frac{\beta}{2\alpha_2}\right),\quad(3)$$

$$\int\exp(\beta z+\gamma)\left[\pm1-\operatorname{erf}(\alpha_1z+\beta_1)\right]dz=$$

$$=\frac{\exp(\beta z+\gamma)}{\beta}\left[\pm1-\operatorname{erf}(\alpha_1z+\beta_1)\right]+$$

$$+\frac{1}{\beta}\exp\left(\frac{\beta^2}{4\alpha_1^2}-\frac{\beta\beta_1}{\alpha_1}+\gamma\right)\operatorname{erf}\left(\alpha_1z+\beta_1-\frac{\beta}{2\alpha_1}\right).\quad(4)$$

Определенные интегралы от рассматриваемых произведений при конечных нижнем и верхнем пределах интегрирования соответственно μ и ν, как обычно, находятся по формуле Ньютона-Лейбница, как разности $f(\nu)-f(\mu)$, $\varphi(\nu)-\varphi(\mu)$.

Предельные виды указанных определенных интегралов при стремлении к бесконечности или ν, или μ, или μ и ν одновременно (зависимо или независимо друг от друга) являются несобственными интегралами от рассматриваемых произведений. Вначале подробно проанализируем случай $\nu\to\infty(T)$. Добавлением обозначения направленной траектории T (в скобках после символа бесконечности) в данной статье подчеркивается факт движения точки ν на комплексной плоскости к бесконечности именно по этой траектории, хотя бы начиная с произвольно выбранного промежуточного положения на ней, то есть, по крайней мере, по ее "внешней" части. До такого положения на T (от точки μ на комплексной плоскости) точка $z=\nu$ может двигаться по любому пути конечной длины. Тогда контур интегрирования будет представляться сочетанием этого пути и "внешней" части траектории T. Формы траекторий T также не регламентируются: они могут быть прямолинейными (в частности, совпадать с осями комплексной плоскости), криволинейными, ломаными, колебательного характера, даже с образованием сложных петель. Единственным требованием к траекториям T является их выпрямляемость, то есть длины их участков между любыми промежуточными точками должны быть конечными. Свобода выбора контура интегрирования на всей открытой комплексной плоскости следует из аналитичности на ней рассматриваемых подынтегральных функций (но приближение точки $z=\nu$ к бесконечности должно происходить обязательно хотя бы по "внешней" части заданной траектории T). В отличие от символа комплексной бесконечности ∞ положительную и отрицательную бесконечность на оси действительных чисел будем обозначать соответственно символами $+\infty$ и $-\infty$.

Для несобственных интегралов, кроме их выражений, требуется определять условия сходимости. При этом обычно ограничиваются достаточными условиями сходимости. Последние для подынтегральных функций в (1) и (2) легко находятся при подходе к интересующим интегралам от них как к разности или сумме соответствующих интегралов от "простых" произведений, получаемых умножением отдельных составляющих в квадратных скобках в выражении рассматриваемой подынтегральной функции на $z^n \exp(\beta z + \gamma)$. Тогда искомые достаточные условия сходимости могут быть записаны как сочетания сформулированных ранее в [5,6] необходимых и достаточных условий сходимости для образовавшихся пар несобственных интегралов от указанных простых произведений. Таким путем для несобственных интегралов с одним бесконечным пределом интегрирования $\infty(T)$ от подынтегральных функций в (1), (2) получаем соответственно формулировки достаточных условий сходимости

$$\lim_{z\to\infty(T)}\left[\operatorname{Re}(\beta z) + n\ln|z|\right] = -\infty,$$

$$\lim_{z\to\infty(T)}\left[\operatorname{Re}\left(\alpha_1^2 z^2 + 2\alpha_1\beta_1 z - \beta z\right) - (n-1)\ln|z|\right] =$$

$$= \lim_{z\to\infty(T)}\left[\operatorname{Re}\left(\alpha_2^2 z^2 + 2\alpha_2\beta_2 z - \beta z\right) - (n-1)\ln|z|\right] =$$

$$= +\infty, \qquad (5)$$

$$\lim_{z\to\infty(T)}\left[\operatorname{Re}(\beta z) + n\ln|z|\right] = -\infty,$$

$$\lim_{z\to\infty(T)}\left[\operatorname{Re}\left(\alpha_1^2 z^2 + 2\alpha_1\beta_1 z - \beta z\right) - (n-1)\ln|z|\right] =$$

$$= +\infty. \qquad (6)$$

Они не охватывают случаев, когда несобственные интегралы в указанных парах расходятся, но их суммы или разности все же стремятся к конечным пределам, что возможно при стремлении к нулю выражений в квадратных скобках в равенствах (1), (2) в процессе приближения точки $z = \nu$ к бесконечности по заданной траектории T и выборе знаков в них (в двойных знаках) по определенным правилам. Согласно [4] такие правила требуют выбора верхних знаков в подынтегральных функциях в (1) и (2) в случаях стремления к $+\infty$ при $z \to \infty(T)$ соответственно величин $\operatorname{Re}(\alpha_1 z)\cdot\operatorname{Re}(\alpha_2 z)$ и $\operatorname{Re}(\alpha_1 z)$, нижних – в случаях стремления при этом тех же величин к $-\infty$. Тогда, если интегралы вероятности сходятся, выражения в квадратных скобках в составах этих функций стремятся к нулю, что дает возможность расширения условий сходимости интересующих несобственных интегралов по сравнению с (5), (6). Заметим, что для самих неопределенных интегралов (1), (2) и соответствующих им определенных интегралов с конечными пределами μ, ν правила выбора знаков не требуются.

Постоянный нижний предел интегрирования μ далее для определенности примем равным нулю. На условия сходимости несобственных интегралов от функций, аналитичных на всей открытой комплексной плоскости (с бесконечным другим пределом), он не влияет, а для выражений таких интегралов при необходимости легко осуществим переход к любому другому значению μ – добавлением определенного интеграла от соответствующей подынтегральной функции с нижним пределом интегрирования μ и нулевым верхним пределом.

Исходя из изложенного, будем рассматривать несобственные интегралы согласно предельному виду формулы Ньютона-Лейбница для $\mu = 0$, $z = \nu \to \infty(T)$ при выполнении указанных правил выбора знаков:

$$\int_0^{\infty(T)} z^n \exp(\beta z + \gamma)\left[\operatorname{erf}(\alpha_1 z + \beta_1) \mp \operatorname{erf}(\alpha_2 z + \beta_2)\right] dz =$$

$$= \lim_{z=\nu\to\infty(T)} f(\nu) - f(0)$$

$$\left\{\lim_{z\to\infty(T)}\left[\operatorname{Re}(\alpha_1 z)\cdot\operatorname{Re}(\alpha_2 z)\right] = \pm\infty\right\}, \qquad (7)$$

$$\int_0^{\infty(T)} z^n \operatorname{erf}(\beta z + \gamma)\left[\pm 1 - \operatorname{erf}(\alpha_1 z + \beta_1)\right] dz =$$

$$= \lim_{z=\nu\to\infty(T)} \varphi(\nu) - \varphi(0) \left\{\lim_{z\to\infty(T)} \operatorname{Re}(\alpha_1 z) = \pm\infty\right\}. \qquad (8)$$

Требуемые здесь конечные пределы первообразных функций $f(z)$, $\varphi(z)$ при $z = \nu \to \infty(T)$ для их выражений (1), (2) – и даже для частных видов последних (3), (4) – в целом пока неизвестны, но легко устанавливаются такие пределы и условия их существования для всех членов в этих выражениях по отдельности.

Как показано ниже, $f(z)$ для (7) можно выражать с использованием $\varphi(z)$, поэтому начнем с анализа несобственного интеграла (8). Первообразную функцию $\varphi(z)$ для него согласно (2) с учетом выражений $F(z)$, $F_1(z)$ в общем случае можно записать как сочетание члена, представленного интегралом вероятности $\mathrm{erf}\left[\alpha_1 z+\beta_1-\beta/(2\alpha_1)\right]$, умноженным на некоторый коэффициент, с членами вида $z^m\exp(\beta z+\gamma)\left[\pm 1-\mathrm{erf}\left(\alpha_1 z+\beta_1\right)\right]$ для $0\le m\le n$ и вида $z^{m-1}\exp\left[-(\alpha_1 z+\beta_1)^2+\beta z+\gamma\right]$ для $0\le m-1\le n-1, n>0$ – также с определенными коэффициентами. Наибольшее значение $m-1=n-1$ здесь определяется просто для четных и нечетных n по отдельности. Кстати, при $n=0$ в выражении (2), представленном и отдельной формулой (4), членов второго вида нет.

Для члена в выражении $\varphi(z)$, упомянутого первым, необходимым и достаточным условием существования конечного предела является такое же условие сходимости интеграла вероятности $\mathrm{erf}\left[\alpha_1 z+\beta_1-\beta/(2\alpha_1)\right]$ при $z\to\infty(T)$, которое согласно [7] формулируется как $\lim\limits_{z\to\infty(T)}\left[\mathrm{Re}\left(\alpha_1^2 z^2+2\alpha_1\beta_1 z-\beta z\right)+\ln|z|\right]=+\infty$. Обратим внимание, что при его выполнении всегда $\left|\mathrm{Re}(\alpha_1 z)\right|\to+\infty$, а данный интеграл вероятности имеет конечный предел, равный 1 и –1 соответственно при стремлении $\mathrm{Re}(\alpha_1 z)$ к $+\infty$ и $-\infty$. Применительно к совокупности членов вида $z^m\exp(\beta z+\gamma)\left[\pm 1-\mathrm{erf}\left(\alpha_1 z+\beta_1\right)\right]$ в выражении (2) – независимо от сходимости или расходимости интеграла вероятности $\mathrm{erf}\left(\alpha_1 z+\beta_1\right)$ при $z\to\infty(T)$ – согласно [7] справедливо неравенство

$$\frac{\left|\pm 1-\mathrm{erf}\left(\alpha_1 z+\beta_1\right)\right|}{\exp\left\{-\mathrm{Re}\left[\left(\alpha_1 z+\beta_1\right)^2\right]\right\}}\le\frac{N}{\left|\alpha_1 z+\beta_1\right|},$$

по крайней мере, если $\lim\limits_{z\to\infty(T)}\mathrm{Re}\left(\alpha_1 z+\beta_1\right)=\pm\infty$, то есть с учетом конечности значений β_1 выполняется оговоренное выше правило выбора знаков $\lim\limits_{z\to\infty(T)}\mathrm{Re}(\alpha_1 z)=\pm\infty$ в (8) (здесь N – некоторое конечное положительное число). На основании этого, а также изложенного в [4, 7], условие стремления каждого члена в указанной совокупности к нулю при $z\to\infty(T)$ (а другие конечные пределы для таких членов невозможны) сводится к аналогичному условию для $|z|^m\exp\left\{-\mathrm{Re}\left[\left(\alpha_1 z+\beta_1\right)^2\right]+\mathrm{Re}(\beta z)\right\}/\left|\alpha_1 z+\beta_1\right|$, то есть – с учетом стремления $|z|$ к бесконечности и конечности α_1, β_1 – для

$$\left|z^{m-1}\right|\exp\left[-\mathrm{Re}\left(\alpha_1^2 z^2+2\alpha_1\beta_1 z-\beta z\right)\right]=$$

$$=\left|z^{m-1}\exp\left(-\alpha_1^2 z^2-2\alpha_1\beta_1 z+\beta z\right)\right|,$$ следовательно, к условию, определяемому как

$$\lim_{z\to\infty(T)}\left[\mathrm{Re}\left(-\alpha_1^2 z^2-2\alpha_1\beta_1 z+\beta z\right)+(m-1)\ln|z|\right]=$$

$$=-\infty.$$

Оно наиболее жестко для максимального значения $m=n$, когда записывается в виде равенства

$$\lim_{z\to\infty(T)}\left[\mathrm{Re}\left(\alpha_1^2 z^2+2\alpha_1\beta_1 z-\beta z\right)-(n-1)\ln|z|\right]=+\infty$$

(справедливого при любом $n\ge 0$). Согласно [4] точно так же записывается необходимое и достаточное условие стремления всех членов вида $z^{m-1}\exp\left[-\left(\alpha_1 z+\beta_1\right)^2+\beta z+\gamma\right]$ в выражении $\varphi(z)$ к нулю при $z\to\infty(T)$ – для $n>0$ (поскольку при $n=0$ ни одного такого члена нет). Как видим, при любом $n\ge 0$ это равенство достаточно и для сходимости несобственного интеграла (8). В частности, при $n=0$ оно совпадает с необходимым и достаточным условием сходимости интеграла вероятности, которым представлен член первообразной функции $\varphi(z)$, упоминавшийся выше первым.

Перейдем к рассмотрению выражения $f(z)$ согласно (1). Правило выбора знаков в нем – применительно к несобственным интегралам в соответствии с (7) – можно оговорить, как и в [4], следующим образом: верхние знаки берутся в случаях одинаковых знаков величин $\mathrm{Re}(\alpha_1 z)$ и $\mathrm{Re}(\alpha_2 z)$ при $z\to\infty(T)$, нижние – в случаях противоположности знаков указанных величин. Одинаковые знаки этих величин могут быть в двух случаях: стремления их обеих к $+\infty$ и стремления их к $-\infty$. Противоположные знаки $\mathrm{Re}(\alpha_1 z)$ и $\mathrm{Re}(\alpha_2 z)$ реализуются в двух других случаях – при $\mathrm{Re}(\alpha_1 z)\to+\infty$, $\mathrm{Re}(\alpha_2 z)\to-\infty$ и при $\mathrm{Re}(\alpha_1 z)\to-\infty$, $\mathrm{Re}(\alpha_2 z)\to+\infty$. Согласно

[4] в каждом из этих четырех случаев комбинацию двух интегралов вероятности в квадратных скобках в (7) можно представить как определенную комбинацию дополнений тех же интегралов вероятности до их предельных значений. Приведем такие представления в порядке перечисления указанных случаев (записываемые с соблюдением правил выбора знаков):

$$\operatorname{erf}(\alpha_1 z+\beta_1)-\operatorname{erf}(\alpha_2 z+\beta_2)=$$
$$=-\left[1-\operatorname{erf}(\alpha_1 z+\beta_1)\right]+\left[1-\operatorname{erf}(\alpha_2 z+\beta_2)\right], \quad (9)$$

$$\operatorname{erf}(\alpha_1 z+\beta_1)-\operatorname{erf}(\alpha_2 z+\beta_2)=$$
$$=-\left[-1-\operatorname{erf}(\alpha_1 z+\beta_1)\right]+\left[-1-\operatorname{erf}(\alpha_2 z+\beta_2)\right], \quad (10)$$

$$\operatorname{erf}(\alpha_1 z+\beta_1)+\operatorname{erf}(\alpha_2 z+\beta_2)=$$
$$=-\left[1-\operatorname{erf}(\alpha_1 z+\beta_1)\right]-\left[-1-\operatorname{erf}(\alpha_2 z+\beta_2)\right], \quad (11)$$

$$\operatorname{erf}(\alpha_1 z+\beta_1)+\operatorname{erf}(\alpha_2 z+\beta_2)=$$
$$=-\left[-1-\operatorname{erf}(\alpha_1 z+\beta_1)\right]-\left[1-\operatorname{erf}(\alpha_2 z+\beta_2)\right]. \quad (12)$$

В соответствии с этими представлениями во всех перечисленных выше возможных случаях выражение $f(z)$ с использованием $\varphi(z)$ получается таким, что для сходимости несобственного интеграла (7) оказывается достаточным условие, найденное выше для (8), с добавлением к нему аналогичного условия, записываемого лишь с заменой α_1 на α_2 и β_1 на β_2 – применительно ко второму интегралу вероятности $\operatorname{erf}(\alpha_2 z+\beta_2)$.

С использованием асимптотических представлений [8] интегралов вероятности в правых частях (1) и (2) – после подстановки в них выражений $F(z)$, $F_1(z)$, $F_2(z)$ – можно убедиться, что указанные – пока как достаточные – условия сходимости для несобственных интегралов (7) и (8) фактически являются необходимыми и достаточными. Соответствующие доказательства (непременного расхождения указанных несобственных интегралов при невыполнении таких условий) аналогичны изложенным в [6], потому здесь опускаются.

Теперь можем записать обобщенные по всем параметрам и траекториям T формулы интересующих несобственных интегралов, получаемых согласно (7) и (8) с учетом конечных предельных значений всех членов $f(z)$ и $\varphi(z)$ при $z\to\infty(T)$ в соответствии с изложенным, с указанием необходимых и достаточных условий сходимости этих интегралов в условиях применимости обеих формул (вместе с правилами выбора знаков)

$$\int_0^{\infty(T)} z^n \exp(\beta z+\gamma)\left[\operatorname{erf}(\alpha_1 z+\beta_1)\mp\operatorname{erf}(\alpha_2 z+\beta_2)\right]dz=$$

$$=\frac{n!\exp(\gamma)}{(-\beta)^{n+1}}\left[\operatorname{erf}(\beta_1)\mp\operatorname{erf}(\beta_2)\right]+$$

$$+n!\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{2^m(-\beta)^{n+1-m}}\left\{\left[A_1-\operatorname{erf}\left(\beta_1-\frac{\beta}{2\alpha_1}\right)\right]V_1(m)+\right.$$

$$\left.+W_1(m)\mp\left[A_2-\operatorname{erf}\left(\beta_2-\frac{\beta}{2\alpha_2}\right)\right]V_2(m)\mp W_2(m)\right\}$$

$$\left\{\lim_{z\to\infty(T)}\left[\operatorname{Re}\left(\alpha_1^2z^2+2\alpha_1\beta_1z-\beta z\right)-(n-1)\ln|z|\right]=\right.$$

$$=\lim_{z\to\infty(T)}\left[\operatorname{Re}\left(\alpha_2^2z^2+2\alpha_2\beta_2z-\beta z\right)-(n-1)\ln|z|\right]=$$

$$\left.=+\infty,\ \lim_{z\to\infty(T)}\left[\operatorname{Re}(\alpha_1 z)\cdot\operatorname{Re}(\alpha_2 z)\right]=\pm\infty\right\}, \quad (13)$$

$$\int_0^{\infty(T)} z^n \exp(\beta z+\gamma)\left[\pm1-\operatorname{erf}(\alpha_1 z+\beta_1)\right]dz=$$

$$=\frac{n!\exp(\gamma)}{(-\beta)^{n+1}}\left[\pm1-\operatorname{erf}(\beta_1)\right]-n!\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{2^m(-\beta)^{n+1-m}}\times$$

$$\times\left\{\left[\pm1-\operatorname{erf}\left(\beta_1-\frac{\beta}{2\alpha_1}\right)\right]V_1(m)+W_1(m)\right\}$$

$$\left\{\lim_{z\to\infty(T)}\left[\operatorname{Re}\left(\alpha_1^2z^2+2\alpha_1\beta_1z-\beta z\right)-(n-1)\ln|z|\right]=\right.$$

$$\left.=+\infty,\ \lim_{z\to\infty(T)}(\alpha_1 z)=\pm\infty\right\}, \quad (14)$$

где $V_i(m)=$

$$=\exp\left(\frac{\beta^2}{4\alpha_i^2}-\frac{\beta\beta_i}{\alpha_i}+\gamma\right)\sum_{k=0}^{E(m/2)}\frac{\left(\beta-2\alpha_i\beta_i\right)^{m-2k}}{k!(m-2k)!\alpha_i^{2m-2k}},$$

$$W_i(m)=\frac{2\alpha_i}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\beta_i^2+\gamma\right)\times$$

$$\times\left\{\sum_{k=1}^{E(m/2)}\frac{1}{k!(m-2k)!}\sum_{l=1}^{k}\frac{l!\left(\beta-2\alpha_i\beta_i\right)^{m-1-2k+2l}}{(2l)!\alpha_i^{2m-2k+2l}}-\right.$$

$$-\sum_{k=1}^{m-E(m/2)}\frac{(k-1)!}{(2k-1)!(m+1-2k)!}\times$$

$$\left.\times\sum_{l=1}^{k}\frac{4^{k-l}\left(\beta-2\alpha_i\beta_i\right)^{m-1-2k+2l}}{(l-1)!\alpha_i^{2m-2k+2l}}\right\},$$

$A_i=1$ при $\lim\limits_{z\to\infty(T)}\mathrm{Re}\left(\alpha_i z\right)=+\infty$, $A_i=-1$ при $\lim\limits_{z\to\infty(T)}\mathrm{Re}\left(\alpha_i z\right)=-\infty$.

Конечно, к первой из двух последних формул легко прийти и с использованием второй (более простой) в сочетании с представлениями (9)–(12).

Напомним, что необходимые и достаточные условия сходимости рассматриваемых несобственных интегралов, записанные в условиях применимости обобщенных формул вместе с правилами выбора знаков, справедливы только при соблюдении таких правил. В противном случае условия применимости формул (13) и (14) будут сводиться соответственно к (5) и (6), записи правил выбора знаков тогда теряют смысл и исключаются (а выражения интегралов в этих формулах не изменяются). Тогда, кстати, оказываются необходимыми и достаточными как раз условия сходимости (5), (6), что показывается также по методике [6] с использованием асимптотических представлений [8] интеграла вероятности.

Из сравнения приведенных вначале условий (5) и (6), достаточных для сходимости рассматриваемых интегралов, с соответствующими необходимыми и достаточными условиями видно, что последние получаются просто исключением требования $\lim\limits_{z\to\infty(T)}\mathrm{Re}\left(\beta z\right)+n\ln|z|=-\infty$ из (5) и (6). Другими словами, оказалось, что такие интегралы могут сходиться и без стремления к нулю при $z\to\infty(T)$ множителя $z^n\exp\left(\beta z+\gamma\right)$ под знаками интегрирования в (13) и (14), то есть функции $z^n\exp\left(\beta z\right)$ (поскольку в данном аспекте γ роли не играет), что становится возможным благодаря стремлению там к нулю выражений в квадратных скобках под знаками интегрирования.

Как и следовало ожидать, фактически отличия необходимых и достаточных условий сходимости рассматриваемых интегралов от соответствующих достаточных условий проявляются только при сходимости интегралов вероятности в подынтегральных выражениях, то есть при стремлении – согласно [7] – к $+\infty$ их контрольных величин $\mathrm{Re}\left(\alpha_1^2z^2+2\alpha_1\beta_1z\right)+\ln|z|$, $\mathrm{Re}\left(\alpha_2^2z^2+2\alpha_2\beta_2z\right)+\ln|z|$ в процессе приближения z к бесконечности по заданной траектории. В случаях расхождения этих интегралов вероятности, а для (13) – хотя бы одного из них, указанные отличия исчезают (если даже соблюдать правила выбора знаков, оказывающиеся тогда бесполезными с точки зрения расширения условий сходимости рассматриваемых несобственных интегралов). Так, представив необходимое и достаточное условие сходимости интеграла в (14) как стремление к $+\infty$ при $z\to\infty(T)$ результата вычитания $\mathrm{Re}\left(\beta z\right)+n\ln|z|$ из контрольной величины $\mathrm{Re}\left(\alpha_1^2z^2+2\alpha_1\beta_1z\right)+\ln|z|$, убеждаемся в следующем: если последняя не стремится к $+\infty$, то есть $\mathrm{erf}\left(\alpha_1z+\beta_1\right)$ расходится, то такое условие выполнимо только одновременно с выполнением требования $\lim\limits_{z\to\infty(T)}\mathrm{Re}\left(\beta z\right)+n\ln|z|=-\infty$. Следовательно, действительно тогда добавление к условию применимости для (14) этого требования ничего не меняет. Аналогично показывается безразличность его добавления к условию применимости формулы (13), если хотя бы один из имеющихся в ее левой части интегралов вероятности расходится. Таким образом, в рассмотренных случаях расходимости интегралов вероятности в подынтегральных выражениях в формулах (13), (14) последние справедливы и при исключении из их условий применимости правил выбора знаков (то есть при произвольном выборе знаков). Однако, если заранее не оговаривать факта сходимости или расходимости указанных интегралов вероятности, то при этом в условия применимости (13) и (14) следует добавлять упомянутое требование стремления $z^n\exp\left(\beta z\right)$ к нулю по мере приближения z к бесконечности по траектории T (взамен исключенных правил выбора знаков).

С представлениями

$$\int_{\infty(T_0)}^{\infty(T)}z^n\exp\left(\beta z+\gamma\right)\left[\mathrm{erf}\left(\alpha_1z+\beta_1\right)\mp\mathrm{erf}\left(\alpha_2z+\beta_2\right)\right]dz=$$

$$= \int_0^{\infty(T)} z^n \exp(\beta z+\gamma)\left[\operatorname{erf}(\alpha_1 z+\beta_1) \mp \operatorname{erf}(\alpha_2 z+\beta_2)\right] dz -$$

$$- \int_0^{\infty(T_0)} z^n \exp(\beta z+\gamma)\left[\operatorname{erf}(\alpha_1 z+\beta_1) \mp \operatorname{erf}(\alpha_2 z+\beta_2)\right] dz, \quad (15)$$

$$\int_{\infty(T_0)}^{\infty(T)} z^n \exp(\beta z+\gamma)\left[\pm 1 - \operatorname{erf}(\alpha_1 z+\beta_1)\right] dz =$$

$$= \int_0^{\infty(T)} z^n \operatorname{erf}(\beta z+\gamma)\left[\pm 1 - \operatorname{erf}(\alpha_1 z+\beta_1)\right] dz -$$

$$- \int_0^{\infty(T_0)} z^n \operatorname{erf}(\beta z+\gamma)\left[\pm 1 - \operatorname{erf}(\alpha_1 z+\beta_1)\right] dz \quad (16)$$

формулы (13), (14) – в применении их одновременно к траекториям T и T_0 – можно использовать и для перехода к соответствующим несобственным интегралам с двумя бесконечными пределами. Конечно, необходимые и достаточные условия сходимости этих интегралов будут являться сочетаниями таких условий, записываемых для обеих траекторий. Должны дублироваться для них и записи правил выбора знаков. Одновременно для второго интеграла в правой части (15) заменяются величины A_i в используемой формуле (13) на величины B_i, определяющиеся равенствами $B_i = 1$ при $\lim\limits_{z\to\infty(T_0)} \operatorname{Re}(\alpha_i z) = +\infty$ и $B_i = -1$ при $\lim\limits_{z\to\infty(T_0)} \operatorname{Re}(\alpha_i z) = -\infty$ (аналогично A_i, но применительно к траектории T_0). В результате, исходя из (13), (14), для интегралов (15), (16) получаем формулы

$$\int_{\infty(T_0)}^{\infty(T)} z^n \exp(\beta z+\gamma)\left[\operatorname{erf}(\alpha_1 z+\beta_1) \mp \operatorname{erf}(\alpha_2 z+\beta_2)\right] dz =$$

$$= n! \sum_{m=0}^{n} \frac{(A_1 - B_1)V_1(m) \mp (A_2 - B_2)V_2(m)}{2^m (-\beta)^{n+1-m}}$$

$$\left\{ \lim_{z\to\infty(T)} \left[\operatorname{Re}\left(\alpha_1^2 z^2 + 2\alpha_1\beta_1 z - \beta z\right) - (n-1)\ln|z|\right] = \right.$$

$$= \lim_{z\to\infty(T_0)} \left[\operatorname{Re}\left(\alpha_1^2 z^2 + 2\alpha_1\beta_1 z - \beta z\right) - (n-1)\ln|z|\right] =$$

$$= \lim_{z\to\infty(T_0)} \left[\operatorname{Re}\left(\alpha_2^2 z^2 + 2\alpha_2\beta_2 z - \beta z\right) - (n-1)\ln|z|\right] =$$

$$= \lim_{z\to\infty(T_0)} \left[\operatorname{Re}\left(\alpha_2^2 z^2 + 2\alpha_2\beta_2 z - \beta z\right) - (n-1)\ln|z|\right] =$$

$$= +\infty, \lim_{z\to\infty(T_0)} \left[\operatorname{Re}(\alpha_1 z)\cdot\operatorname{Re}(\alpha_2 z)\right] =$$

$$\left. = \lim_{z\to\infty(T)} \left[\operatorname{Re}(\alpha_1 z)\cdot\operatorname{Re}(\alpha_2 z)\right] = \pm\infty \right\}, \quad (17)$$

$$\int_{\infty(T_0)}^{\infty(T)} z^n \exp(\beta z+\gamma)\left[\pm 1 - \operatorname{erf}(\alpha_1 z+\beta_1)\right] dz = 0$$

$$\left\{ \lim_{z\to\infty(T_0)} \left[\operatorname{Re}\left(\alpha_1^2 z^2 + 2\alpha_1\beta_1 z - \beta z\right) - (n-1)\ln|z|\right] = \right.$$

$$= \lim_{z\to\infty(T)} \left[\operatorname{Re}\left(\alpha_1^2 z^2 + 2\alpha_1\beta_1 z - \beta z\right) - (n-1)\ln|z|\right] =$$

$$\left. = +\infty, \lim_{z\to\infty(T_0)} \operatorname{Re}(\alpha_1 z) = \lim_{z\to\infty(T)} \operatorname{Re}(\alpha_1 z) = \pm\infty \right\}. \quad (18)$$

Заметим, что в нуль обращается и предпоследний интеграл, если в его формуле $A_1 = B_1$, $A_2 = B_2$ (но без изменения ее условия применимости). Кстати, в соответствии с правилом выбора знаков там в этом случае возможен лишь выбор верхнего знака, так как тогда, очевидно, оказываются равными друг с другом попарно: пределы $\operatorname{Re}(\alpha_1 z)$ при $z \to \infty(T_0)$ и при $z \to \infty(T)$ в первой паре, пределы $\operatorname{Re}(\alpha_2 z)$ при $z \to \infty(T_0)$ и при $z \to \infty(T)$ – во второй. Указанными пределами в случаях выполнения необходимого и достаточного условия сходимости несобственного интеграла в (17) могут быть только или $+\infty$, или $-\infty$.

Следует отметить, что на форму траектории T_0 также нет ограничений, кроме требования ее выпрямляемости (см.выше). Для (17), (18) движения нижнего и верхнего пределов интегрирования μ и ν исходного определенного интеграла к бесконечности по своим траекториям T_0 и T (соответственно) на комплексной плоскости могут начинаться с произвольно выбранных на них конечных точек, а между последними допустимо интегрирование по любому пути с конечной длиной. Тогда контур интегрирования в целом будет состоять из "внешних" участков

траекторий T_0, T и указанного пути (в направлении, совпадающем с направлением траектории T).

В случае $n=0$, представляющем особый интерес, из (13), (14), (17), (18) следуют соответствующие (3), (4) частные формулы:

$$\int_0^{\infty(T)} \exp(\beta z+\gamma)\left[\operatorname{erf}(\alpha_1 z+\beta_1) \mp \operatorname{erf}(\alpha_2 z+\beta_2)\right] dz =$$

$$= \frac{1}{\beta}\exp\left(\frac{\beta^2}{4\alpha_1^2}-\frac{\beta\beta_1}{\alpha_1}+\gamma\right)\left[\operatorname{erf}\left(\beta_1-\frac{\beta}{2\alpha_1}\right)-A_1\right] \mp$$

$$\mp \frac{1}{\beta}\exp\left(\frac{\beta^2}{4\alpha_2^2}-\frac{\beta\beta_2}{\alpha_2}+\gamma\right)\left[\operatorname{erf}\left(\beta_2-\frac{\beta}{2\alpha_2}\right)-A_2\right] -$$

$$-\frac{\exp(\gamma)}{\beta}\left[\operatorname{erf}(\beta_1) \mp \operatorname{erf}(\beta_2)\right]$$

$$\left\{\lim_{z\to\infty(T)}\left[\operatorname{Re}\left(\alpha_1^2 z^2+2\alpha_1\beta_1 z-\beta z\right)+\ln|z|\right]=\right.$$

$$= \lim_{z\to\infty(T)}\left[\operatorname{Re}\left(\alpha_2^2 z^2+2\alpha_2\beta_2 z-\beta z\right)+\ln|z|\right]=+\infty,$$

$$\left.\lim_{z\to\infty(T)}\left[\operatorname{Re}(\alpha_1 z)\cdot\operatorname{Re}(\alpha_2 z)\right]=\pm\infty\right\}, \qquad (19)$$

$$\int_0^{\infty(T)} \exp(\beta z+\gamma)\left[\pm 1-\operatorname{erf}(\alpha_1 z+\beta_1)\right] dz =$$

$$= \frac{1}{\beta}\exp\left(\frac{\beta^2}{4\alpha_1^2}-\frac{\beta\beta_1}{\alpha_1}+\gamma\right)\left[\pm 1-\operatorname{erf}\left(\beta_1-\frac{\beta}{2\alpha_1}\right)\right] -$$

$$-\frac{\exp(\gamma)}{\beta}\left[\pm 1-\operatorname{erf}(\beta_1)\right]$$

$$\left\{\lim_{z\to\infty(T)}\left[\operatorname{Re}\left(\alpha_1^2 z^2+2\alpha_1\beta_1 z-\beta z\right)+\ln|z|\right]=+\infty,\right.$$

$$\left.\lim_{z\to\infty(T)}\operatorname{Re}(\alpha_1 z)=\pm\infty\right\}, \qquad (20)$$

$$\int_{\infty(T_0)}^{\infty(T)} \exp(\beta z+\gamma)\left[\operatorname{erf}(\alpha_1 z+\beta_1) \mp \operatorname{erf}(\alpha_2 z+\beta_2)\right] dz =$$

$$= \frac{B_1-A_1}{\beta}\exp\left(\frac{\beta^2}{4\alpha_1^2}-\frac{\beta\beta_1}{\alpha_1}+\gamma\right) \mp$$

$$\mp \frac{B_2-A_2}{\beta}\exp\left(\frac{\beta^2}{4\alpha_2^2}-\frac{\beta\beta_2}{\alpha_2}+\gamma\right)$$

$$\left\{\lim_{z\to\infty(T_0)}\left[\operatorname{Re}\left(\alpha_1^2 z^2+2\alpha_1\beta_1 z-\beta z\right)+\ln|z|\right]=\right.$$

$$= \lim_{z\to\infty(T_0)}\left[\operatorname{Re}\left(\alpha_2^2 z^2+2\alpha_2\beta_2 z-\beta z\right)+\ln|z|\right]=$$

$$= \lim_{z\to\infty(T)}\left[\operatorname{Re}\left(\alpha_1^2 z^2+2\alpha_1\beta_1 z-\beta z\right)+\ln|z|\right]=$$

$$= \lim_{z\to\infty(T)}\left[\operatorname{Re}\left(\alpha_2^2 z^2+2\alpha_2\beta_2 z-\beta z\right)+\ln|z|\right]=+\infty,$$

$$\lim_{z\to\infty(T_0)}\left[\operatorname{Re}(\alpha_1 z)\cdot\operatorname{Re}(\alpha_2 z)\right]=$$

$$\left.= \lim_{z\to\infty(T)}\left[\operatorname{Re}(\alpha_1 z)\cdot\operatorname{Re}(\alpha_2 z)\right]=\pm\infty\right\}, \qquad (21)$$

$$\int_{\infty(T_0)}^{\infty(T)} \exp(\beta z+\gamma)\left[\pm 1-\operatorname{erf}(\alpha_1 z+\beta_1)\right] dz = 0$$

$$\left\{\lim_{z\to\infty(T_0)}\left[\operatorname{Re}\left(\alpha_1^2 z^2+2\alpha_1\beta_1 z-\beta z\right)+\ln|z|\right]=\right.$$

$$= \lim_{z\to\infty(T)}\left[\operatorname{Re}\left(\alpha_1^2 z^2+2\alpha_1\beta_1 z-\beta z\right)\right]=+\infty,$$

$$\left.\lim_{z\to\infty(T_0)}\operatorname{Re}(\alpha_1 z)=\lim_{z\to\infty(T)}\operatorname{Re}(\alpha_1 z)=\pm\infty\right\}. \qquad (22)$$

Чаще всего на практике встречаются частные виды траекторий T, T_0, совмещающиеся с действительной осью комплексной плоскости, то есть случаи интегрирования с действительными бесконечными пределами. При этом формулы (13), (14), (17), (19)–(21) остаются в силе, лишь конкретизируются их условия применимости и значения A_i, B_i в (13), (17), (19), (21), а сходящиеся интегралы видов (18), (22) оказываются невозможными. Заметим, что все излагаемое ниже по поводу формул (13), (14), (17) и (18) в части значения $n=0$ относится и соответственно к (19), (20), (21) и (22) (в том числе об исключении или игнорировании правил выбора знаков в них).

При замене в (13) $\infty(T)$ на $+\infty$ необходимое и достаточное условие сходимости соответствующего интеграла в случае $n=0$ записывается в виде "$\operatorname{Re}(\alpha_1^2)\ge 0$, $\operatorname{Re}(\alpha_2^2)\ge 0$, дополнительно: $\operatorname{Re}\beta \le 2\operatorname{Re}(\alpha_1\beta_1)$ при $\operatorname{Re}(\alpha_1^2)=0$,

$\mathrm{Re}\beta \le 2\mathrm{Re}(\alpha_2\beta_2)$ при $\mathrm{Re}(\alpha_2^2)=0$", правило выбора знаков там может записываться как "$\pm\mathrm{Re}\alpha_1 \cdot \mathrm{Re}\alpha_2 > 0$", а в случаях $n>0$ лишь меняются знаки "$\le$" в записях дополнительных требований в формулировке необходимого и достаточного условия сходимости на "$<$". Одновременно тогда в (13) при любых $n \ge 0$ подставляются значения $A_i = 1$ и $A_i = -1$, если соответственно $\mathrm{Re}\alpha_i > 0$ и $\mathrm{Re}\alpha_i < 0$. При замене там же верхнего предела $\infty(T)$ на $-\infty$ приходим к аналогичным записям, но с заменой неравенств в дополнительных требованиях на противоположные при любых $n \ge 0$ и к подстановкам $A_i = 1$ для $\mathrm{Re}\alpha_i < 0$, $A_i = -1$ для $\mathrm{Re}\alpha_i > 0$ (правило выбора знаков не меняется по сравнению со случаем интегрирования с пределом $+\infty$).

При замене для интеграла (14) $\infty(T)$ на $+\infty$ его необходимое и достаточное условие сходимости в случае $n=0$ записывается в виде "$\mathrm{Re}(\alpha_1^2) \ge 0$, дополнительно $\mathrm{Re}\beta \le 2\mathrm{Re}(\alpha_1\beta_1)$ при $\mathrm{Re}(\alpha_1^2) \ge 0$", в случаях $n>0$ – в виде "$\mathrm{Re}(\alpha_1^2) \ge 0$, дополнительно $\mathrm{Re}\beta < 2\mathrm{Re}(\alpha_1\beta_1)$ при $\mathrm{Re}(\alpha_1^2)=0$", а правило выбора знаков для всех $n \ge 0$ – в виде "$\pm\mathrm{Re}\alpha_1 > 0$". Если заменить $\infty(T)$ в формуле (14) на $-\infty$, то в ее условии применимости записываются противоположными (относительно указанных для предела интегрирования $+\infty$) знаки неравенств в дополнительных требованиях как при $n=0$, так и при $n>0$, а правило выбора знаков в данной формуле тогда принимает вид "$\pm\mathrm{Re}\alpha_1 < 0$".

При переходе в формуле (17) от пределов интегрирования $\infty(T_0)$ и $\infty(T)$ соответственно к $-\infty$ и $+\infty$ ее условие применимости для $n=0$ формулируется как "$\mathrm{Re}(\alpha_1^2) \ge 0$, $\mathrm{Re}(\alpha_2^2) \ge 0$, дополнительно: $\mathrm{Re}\beta = 2\mathrm{Re}(\alpha_1\beta_1)$ при $\mathrm{Re}(\alpha_1^2)=0$, $\mathrm{Re}\beta = 2\mathrm{Re}(\alpha_2\beta_2)$ при $\mathrm{Re}(\alpha_2^2)=0$; $\pm\mathrm{Re}\alpha_1 \cdot \mathrm{Re}\alpha_2 > 0$", для $n>0$ – как "$\mathrm{Re}(\alpha_1^2) > 0$, $\mathrm{Re}(\alpha_2^2) > 0$, $\pm\mathrm{Re}\alpha_1 \cdot \mathrm{Re}\alpha_2 > 0$", а в выражение интеграла там подставляются значения $A_i = 1$ при $\mathrm{Re}\alpha_i > 0$, $A_i = -1$ при $\mathrm{Re}\alpha_i < 0$, $B_i = 1$ при $\mathrm{Re}\alpha_i < 0$, $B_i = -1$ при $\mathrm{Re}\alpha_i > 0$.

Формула (18) для случая интегрирования с пределами $-\infty$, $+\infty$ и с соблюдением правила выбора знаков становится невозможной ввиду несовместимости тогда этого правила применительно к двум указанным пределам интегрирования.

При отказе от правил выбора знаков (или нарушениях таких правил) в приведенные условия применимости формул рассматриваемых несобственных интегралов с действительными пределами добавляется: для предела $+\infty$ – требование $\mathrm{Re}\beta < 0$, для предела $-\infty$ – требование $\mathrm{Re}\beta > 0$. Как видим, указанные требования несовместимы друг с другом, поэтому при переходе к действительным пределам интегрирования $-\infty$, $+\infty$ с исключением правила выбора знаков становятся невозможными обе формулы (17) и (18).

Если параметры $\beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ и переменная *z* принимают только действительные значения $b \ne 0, c, a_1 \ne 0, b_1, a_2 \ne 0, b_2$ и x (соответственно), то рассматриваемые интегралы переходят в свои аналоги в действительной области. В этой области приведенные выше для действительных пределов интегрирования условия применимости формул (13), (14), (17) сводятся только к правилам выбора знаков: для упомянутых аналогов (13) и (17) – к неравенству $\pm a_1 a_2 > 0$, для аналога (14) – к неравенству $\pm a_1 > 0$. Указания по поводу подстановок значений A_i, B_i применительно к пределам $+\infty$ и $-\infty$ справедливы и для действительной области (с заменой $\mathrm{Re}\alpha_i$ в правилах выбора этих значений на a_i). При отказе от правил выбора знаков или игнорировании этих правил условия применимости для (13), (14) в действительной области сведутся к неравенствам $b<0$ и $b>0$ соответственно в случаях верхнего предела интегрирования $+\infty$ и $-\infty$, а условие применимости формулы (17) становится невыполнимым (интеграл в ней тогда расходится независимо от значения *b*). Интегралы вида (18) в действительной области, как и в комплексной при действительных бесконечных пределах интегрирования, всегда расходятся, в том числе и при отказе от правила выбора знаков (обратим внимание, что выбор одинаковых знаков применительно к обоим пределам $+\infty$ и $-\infty$ в них невозможен).

В заключение отметим, что цель данной статьи достигнута, причем для рассмотренных несобственных интегралов получены максимально широкие – необходимые и достаточные – условия сходимости применительно к контурам интегрирования произвольных форм на комплексной плоскости, в том числе и к совпадаю-

щим с ее осями. Приведенные формулы, в частности, могут использоваться и в действительной области, представляющей особый интерес с точки зрения их технических приложений.

Литература

1. *Градштейн И.С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М. : Наука, 1971.

2. *Прудников А.П.* Интегралы и ряды. Специальные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М. : Наука, 2003.

3. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. А. Абрамовица и И. Стиган. – М. : Наука, 1971.

4. *Коротков Н.Е.* Интегралы для приложений интеграла вероятностей / Н.Е. Коротков. – Воронеж: ФГУП ВНИИС, 2002.

5. *Коротков Н.Е.* Полные условия сходимости комплексных несобственных интегралов от экспоненциальных функций и их произведений со степенями независимой переменной / Н.Е. Коротков, А.Н. Мокроусов // Теория и техника радиосвязи: науч.-техн. сб. / «Концерн «Созвездие». – Воронеж, 2006. – Вып. 1. – С. 39–43.

6. *Коротков Н.Е.* Сходимость несобственных интегралов от произведений интеграла вероятности со степенными и экспоненциальными функциями // Теория и техника радиосвязи: науч.-техн. сб. / «Концерн «Созвездие». – Воронеж, 2006. – Вып. 2. – С. 123–137.

7. *Коротков Н.Е.* Анализ предельных свойств комплексного интеграла вероятности при стремлении аргумента к бесконечности // Теория и техника радиосвязи: науч.-техн. сб. / «Концерн «Созвездие». – Воронеж, 2006. – Вып. 1. – С. 44–57.

8. *Коротков Н.Е.* Представления комплексного интеграла вероятностей элементарными функциями при стремлении аргумента к бесконечности // Теория и техника радиосвязи: науч.-техн. сб. / ВНИИС. – Воронеж, 2005. – Вып. 2. – С. 25–31.

Получено 29.08.06г.

УДК 681.518

ОПТИМИЗАЦИЯ ДИАЛОГА ЧЕЛОВЕК – МАШИНА КАК ОДИН ИЗ ПУТЕЙ ПОВЫШЕНИЯ ОПЕРАТИВНОСТИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЯ ДОЛЖНОСТНЫМ ЛИЦОМ В ЕСУ ТЗ

Д.З. АРИФУЛЛИН, А.Н. ДЕРЕЕВ, И.В. САЛЬТЕВСКИЙ

На основе структурного анализа программного обеспечения единой системы управления тактического звена определен такой значимый с точки зрения обеспечения заданных вероятностно временных характеристик показатель процесса выработки, формирования и принятия решения должностным лицом, как способы организации диалога человек – машина.

Одной из целей создания ЕСУ ТЗ является автоматизация деятельности, как индивидуальной, так и групповой, должностных лиц (ДЛ) органов управления во все периоды оперативной обстановки, позволяющая с максимальной эффективностью управлять тактическими воинскими формированиями (ТВФ). Данная цель достигается путем совершенствования алгоритмов и средств формирования и поддержания единого информационно-разведывательного и информационно-управляющего пространств ТВФ с наращиванием номенклатуры и численности объектов – источников информации, услуг обработки и представления информации должностным лицам.

В данной статье акцентируется внимание на способах обработки и представлении информации должностным лицам посредством диалога человек – машина.

Поскольку в некоторых случаях на принятие решения ДЛ отводится недостаточно времени, необходимо сократить временные затраты на осуществление тех операций, которые может взять на себя программно-технический комплекс (ПТК) в части обработки и представления информации.

Процессу выработки, принятия и формирования решения ДЛ на автоматизированном рабочем месте (АРМ) предшествует предоставление ДЛ исходных данных, необходимых для обеспечения информационной поддержки ДЛ в процессе принятия решения.

Так, например, во время проведения государственных испытаний ЕСУ ТЗ экспериментальным путем было установлено, что время предоставления исходных данных ДЛ имеет меньшее значение, чем время выработки, принятия и формирования решения ДЛ. Поэтому в данной статье особое внимание уделяется такой немаловажной составляющей данного процесса, как диалог человек-машина. Также рассматриваются некоторые пути модернизации и унификации данной составляющей, что в свою очередь влияет на повышение оперативности процесса выработки, принятия и формирования решения ДЛ в целом.

Как показал предварительный анализ, в качестве путей повышения оперативности процесса выработки, принятия и формирования решения ДЛ можно выделить:

– оптимизацию организации пользовательского интерфейса;

– реализацию справочной системы.

Организация пользовательского интерфейса

Пользовательский интерфейс предоставляет возможности управлять обработкой информации, вводить информацию в систему, отображать запрашиваемую информацию пользователю. Эти функции предполагают противоречивые требования к пользовательскому интерфейсу, как то: интерфейс, оптимизированный для ввода информации, неудобен при ее отображении. Необходимо различать критерии оценки пользовательского интерфейса в зависимости от его назначения. Основными критериями среды отображения информации являются наглядность и возможность масштабирования информации. Основными критериями среды ввода данных в систему являются безошибочность и время ввода информации [1].

Повысить эффективность организации пользовательского интерфейса при вводе информации возможно по нескольким направлениям:

– систематизация инструментария;

– унификация пользовательской среды;

– эргономичный подход;

– система настройки интерфейса пользователя.

В процессе разработки интерфейса происходит первичная систематизация инструментария, которая при эксплуатации оказывается далекой от совершенства. Необходимо понимать, что стандартизация назначения, размещения, наименования инструмента является основным следствием правильной систематизации. Однако при разработке специфических задач (таких как разработка среды принятия решения и планирования) легко уступить соблазну использования разработанных унифицированных окон интерфейса. Такое решение не может отвечать требованиям к среде планирования и принятия решения – опыт систематизации следует трансформировать в векторе правил организации новой среды.

В качестве основных требований к среде планирования и принятия решения следует выделить необходимость работы с данными из разнородных информационных и вычислительных процессов и невозможность полностью формализовать процесс планирования. Поэтому основными принципами унификации и систематизации среды разработки принятия решения и планирования становятся принцип постепенной формализации и принцип наращивания инструментальных возможностей в направлении фокуса внимания пользователя.

Систематизация инструментария формирует многоуровневую организацию классификации инструментов в рамках пользовательской среды или в рамках инструментария подключаемых технологий обработки данных [1]. Систематизация инструментария позволяет группировать инструмент в наборы целевых функций интерфейса пользователя, организовывать точную настройку инструментария.

Унификация пользовательской среды подразумевает стандартизацию общих инструментов, унификацию способа наращивания инструментальных возможностей, стандартизацию описания инструментов разнообразных технологий обработки данных в интерфейсе пользователя (вид представления, место расположения, правила вызова, возможность назначения сочетания клавиш, комментарий расшифровки назначения, наименование, не повторяющее наименования общих инструментов).

Примером унифицированного способа наращивания инструментальных возможностей может служить панель инструментов, в которой отображается набор инструментария в соответствии с решаемой пользователем задачей: рис.1 – управление обработкой мультимедийной информации; рис.2 – панель разработки таблицы произвольного содержания.

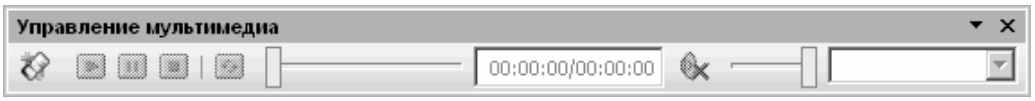


Рис.1. Панель управления мультимедиа

Рис.2. Панель разработки таблицы

На рис.1,2 показаны панели наращиваемого инструментария, объединенные структурой обрабатываемой пользователем информации. Регламентированным образом панели прорисовываются в интерфейсе в соответствии с возможностями редактирования данных, с которыми в данный момент работает пользователь. Если пользователь переходит к обработке других данных, инструментарий заменяется в соответствии с новыми потребностями. Унифицированным в данном случае оказывается не только инструментарий, но и способ подключения и отображения нового инструмента.

Такое построение интерфейса пользователя позволяет создавать среду разработки, эволюционирующую вместе с развитием формализованного пространства АСУ.

Унификация и систематизация как способы оптимизации пользовательской среды позволяют выиграть время на обучении и довести однообразные операции ручного ввода за короткий промежуток времени до уровня автоматизма за счет интуитивного знания местоположения инструмента и его назначения.

Следующим направлением повышения эффективности организации пользовательского интерфейса является применение *эргономичного подхода* к его построению, который заключается в высвобождении максимального пространства окна под область, содержащую полезную для

пользователя информацию. При исходном размере окна это осуществимо лишь в ущерб другим элементам окна. Поскольку приоритетной в данном случае является область с рабочими данными, допустимо уменьшение выделяемой площади окна со служебной или функциональной нагрузкой. Под такими элементами окна понимаются функциональные кнопки, меню, панели и т.д. Уменьшения площади, которую занимают данные элементы, можно добиться посредством использования вместо наименований кнопок так называемых иконок. Иконки представляют собой графическое представление операций, совершаемых по нажатию или выбору элемента, на который они нанесены.

Все иконки можно классифицировать согласно тому, насколько точно они отображают несущую функцию:

- иконки подобия – иконки похожи на объекты, которые они отображают (типа ножниц, чтобы отобразить операцию «вырезки»);
- иконки по образцу – представляют пример типа объекта (например, иконка, показывающая линию, чтобы представить средство рисования);
- символические иконки – используются, чтобы представить действие или состояние в символической форме (например, изображение принтера на кнопке достаточно сложно неоднозначно ассоциировать с функцией печати);
- произвольные иконки – не несут никакой информации по поводу их представления, поэтому их назначение должно быть описано (например, обратная круговая стрелка, чтобы представить действие «отмена последней команды») [2].

а) б) в) г)

Рис.3.Примеры иконок
а) подобия, б) по образцу,
в) символическая иконка,
г) произвольная иконка

Экспертный анализ показал, что в ряде случаев площадь, занимаемую функциональными элементами, посредством использования «иконок» можно сократить в три раза.

Система настройки интерфейса пользователя предназначена для настройки графической оболочки по вкусу пользователя, конфигурации инструментальных возможностей пользователем, возможностей назначения и организации пользователем системы «горячих клавиш». Настроенная пользователем среда является наиболее дружелюбной (естественной), а система «горячих клавиш» позволяет заменить последовательность ручных операций одной операцией. Преимущества адаптированной среды неоспоримы для постоянного пользователя, но сомнительны при систематической смене пользователей. Предварительным решением может служить создание локальных профилей пользователей и возможности отката к стандартной конфигурации интерфейса и системе «горячих клавиш», заложенной разработчиком. По сути, «горячие клавиши» есть сочетание нескольких клавиш, при нажатии на которые выполняется та или иная операция (операции). Используя сочетания клавиш, можно открывать, закрывать, перемещаться по различным меню и диалоговым окнам. Система «горячих клавиш» незаметно приучает пользователя к клавиатуре, вытесняя манипулятор мышь, что позволяет на порядок улучшить ВВХ ввода данных в полевых условиях.

В рамках реализации программного обеспечения ЕСУ ТЗ данные подходы применялись, но, к сожалению, фрагментарно, что не позволило извлечь максимальную пользу из возможностей системы (в части организации диалога человек – машина).

Применение вышеизложенных путей оптимизации пользовательского интерфейса (среды планирования и принятия решения) позволит сократить время, затрачиваемое ДЛ для ввода и выбора необходимой информации и, как следствие, время выработки, принятия и формирования решения.

Критериями оценки качества среды планирования и принятия решения следует определить: удобство, скорость ввода, безошибочность ввода, наглядность, скорость обучения.

Справочная система

Справочная система направлена на обеспечение ДЛ необходимой справочной информацией, облегчение процесса ввода (вывода) требуемой информации, а также обнаружение и предотвращение заведомо ошибочных действий.

Справочная система может включать следующие функции:

– расшифровка аббревиатур и сокращений, фигурирующих в проекте (интерфейсе пользователя);

– реализация интеллектуализированного набора документов, поиска и т.д;

– использование функциональных сообщений;

– предотвращение, обнаружение и исправление ошибок;

Расшифровка аббревиатур и сокращений, фигурирующих в проекте (интерфейсе пользователя), позволит ДЛ-пользователю не обращаться в ряде случаев к помощи справочной системы, что соот-

ветственно снижает время, затрачиваемое ДЛ на работу по выбору (вводу) информации.

Данная функция может быть реализована различными путями – как принудительно, так и инициативно.

Принудительные подсказки предполагают расшифровку (предоставление помощи), например, по прошествии определенного времени «простаивания» системы.

Инициативные подсказки предусматривают вызов процедуры подсказки по инициативе пользователя, в качестве которой может выступать нажатие клавиши, наведение курсора и т.п.

Система интеллектуализации ввода (вывода, поиска и т.д.) информации позволит реализовать возможность предоставления ДЛ-пользователю выбора вариантов слов (фраз) для ввода по начальным символам. Также, данную систему можно применить к процедуре поиска, организовав память искомых ранее понятий (фраз) и т.д.

Для реализации данной процедуры необходимо создание специальных словарей, включающих максимально возможное число слов (или фраз), в соответствии с предметной областью использования системы. К сожалению, технические средства (а именно рабочие станции), используемые в ЕСУ ТЗ, не позволяют реализовать данную процедуру с максимальной эффективностью, поскольку вычислительные мощности оставляют желать лучшего.

Использование функциональных сообщений позволит направлять действия пользователя в нужную сторону, подсказывать и предупреждать в процессе выполнения необходимых действий на пути решения задачи. Функциональные сообщения могут включать подтверждения действий со стороны пользователя и подтверждения того, что задачи выполнены системой успешно либо по каким-то причинам не выполнены. Сообщения могут быть реализованы в форме диалога, экранных заставок и т.п.

Функциональные сообщения могут предложить пользователю:

– выбрать из предложенных альтернатив некую опцию или набор опций;

– ввести некоторую информацию;

– выбрать опцию из набора опций, которые могут изменяться в зависимости от текущего контекста;

– предложить подтверждение наличия фрагмента введенной информации перед продолжением ввода.

Функциональные сообщения могут быть помещены в модальные диалоговые окна, которые вынуждают пользователя ответить на вопрос прежде, чем может быть предпринято любое другое действие, потому что все другие средства управления заморожены (рис. 4). Это может быть полезно, когда система должна вынудить пользователя принять решение перед продолжением работы. Немодальные диалоговые окна позволяют работать с другими элементами интерфейса, в то время как само окно может игнорироваться.

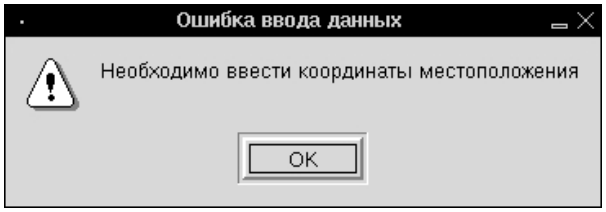


Рис.4. Пример функционального сообщения

Предотвращение, обнаружение и исправление ошибок

Ошибки могут быть классифицированы:

– на ошибки, которые основаны на неправильном понимании действия или порядка действий;

– непреднамеренные ошибки, которые возникли случайно, например опечатка при вводе текста.

Также ошибки второго вида могут быть разделены еще на четыре типа:

– ошибки неточности выбора опции (например, пользователь случайно нажал кнопку «Выход», и программа закрылась);

– ошибки управления данными (например, ошибочная трактовка понятия вследствие неточности отображения последнего);

– ошибка потери активности, когда пользователь забывает необходимую последовательность действий для продолжения работы;

– ошибка режима или состояния – пользователь думает, что он находится в одном состоянии, но фактически – в другом (например, режим вставки взамен режима печати) [3].

Пользователь есть человек, а человеку свойственно ошибаться, и поэтому, какой бы совершенной ни была система (программа), он всегда будет делать ошибки. Поэтому в разрабатываемой системе всегда должна быть предусмотрена защита от ошибок. Техника защиты от ошибок включает в себя следующие аспекты:

– принудительные действия в системе, которые предотвращают или затрудняют появление ошибок;

– обеспечение информативных сообщений об ошибках, не только сообщающих о некорректности действий ДЛ, но и поясняющих их суть (пример на рис.5);

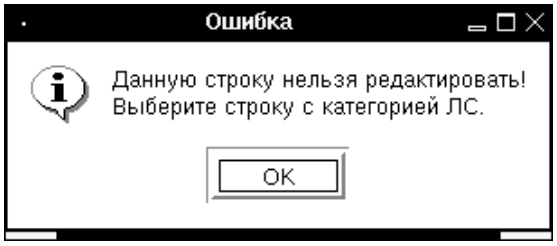


Рис.5. Пример сообщения об ошибочных действиях

– использование обратимых действий, которые позволяют пользователям исправлять их собственные ошибки;

– обеспечение нормальной диагностики системы, в процессе которой пользователю объясняется, в чем суть ошибки и каковы пути ее исправления.

В настоящий момент в программном обеспечении ЕСУ ТЗ реализация системы предотвращения ошибочных действий ДЛ ограничивается элементарными операциями, такими как запрос на удаление или напоминание о необходимости сохранения данных перед выходом из диалога.

Применение справочной системы позволит сократить вероятность ошибок со стороны ДЛ, а в некоторых случаях и полностью избежать их.

В заключение хочется отметить, что решение и другие сложные боевые документы содержат как текстовую, так и графическую части, следовательно, требуется наличие удобного и высокоэффективного инструментария их формирования. Приведенные пути повышения оперативности данного процесса могут быть применены как в ходе работы с текстовой частью документа, так и с графической.

Таким образом, в данной статье рассматриваются некоторые из составляющих, оказывающих влияние на процесс выработки, формирования и принятия решения ДЛ в ЕСУ ТЗ, и пути их оптимизации с целью повышения оперативности данного процесса.

Литература

1. *Четверикова В.Н.* Организация взаимодействия человека с техническими средствами АСУ / В.Н. Четверикова.– М. : Высш. шк., 1993. – Т. 4 : Отображение информации.

2. Рекомендации по общепользовательскому интерфейсу / *Microsoft* ; редакция 1995. – http://www.microsoft.ru.

3. *Четверикова В.Н.* Организация взаимодействия человека с техническими средствами АСУ / В.Н. Четверикова. – М. : Высш. шк., 1993. – Т. 7: Системное проектирование взаимодействия человека с техническими средствами.

4. Зимин Н. *Microsoft Corporation.* Индуктивный пользовательский интерфейс (Microsoft Inductive User Interface Guidelines) : пер. с англ. / Н. Зимин, М. Аршава. – http://www.rusdoc.ru.

5. *Олифер Н.* Базовые технологии локальных сетей / Н. Олифер, В. Олифер. – СПб. : Центр информационных технологий, 2002.

Получено 28.03.07 г.

УДК 621.391

ПРАКТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МАРШРУТИЗАЦИИ ПАКЕТОВ В МОБИЛЬНЫХ СЕТЯХ ПАКЕТНОЙ РАДИОСВЯЗИ

А.А. ЧЕРНИГИН, А.А. СТУПИНА, Н.Н. АВДЕЕВ

Рассмотрена возможность практической реализации алгоритма маршрутизации пакетов в сети для реальных современных микроконтроллеров.

В последние годы мобильная связь приобретает все большую и большую популярность. Устройства уменьшаются в габаритах, увеличивается время автономной работы от батарей, а коммуникационные протоколы приобретают большую надежность и производительность. Большинство технологий беспроводной связи базируется на принципе точка-точка. Одни из наиболее популярных представителей – GSM и WLAN – основываются на принципе прямого взаимодействия мобильной станции и точки доступа. Главный недостаток таких систем – наличие базовой станции, которая ограничивает области применения данной технологии. Типичным примером служит оперативное развертывание сети в районах стихийных бедствий или военных операций, где скорость создания и мобильность сети являются критически важными параметрами.

В противоположность технологии точка-точка выступает модель много прыжкового (multihop) взаимодействия. В таких сетях узлы являются мобильными и динамически формируют временную сеть без использования существующей сетевой инфраструктуры. Из-за ограниченного радиуса действия передатчика может понадобиться некоторые число прыжков (hops) пакета, прежде чем он достигнет узла-получателя [1]. Таким образом, все узлы выполняют функции маршрутизаторов и участвуют в определении маршрутов до других узлов сети и управлении ими.

Алгоритмы маршрутизации применяются для определения оптимального пути пакетов от источника к приемнику и являются основой любого протокола маршрутизации. Для формулирования алгоритмов маршрутизации сеть рассматривается как граф. При этом маршрутизаторы являются узлами, а физические линии между маршрутизаторами – ребрами соответствующего графа [2]. Для примера, на рис.1 представлена сеть, изображенная в виде неориентированного графа.

Каждой грани графа присваивается определенное число – стоимость, зависящая от физической длины линии, скорости передачи данных, надежности, задержки, стоимости связи и т.д.

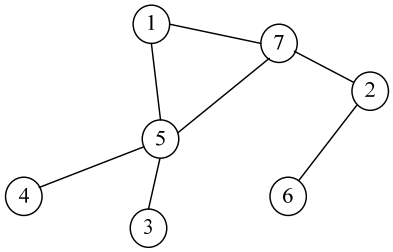


Рис.1. Пример сети, представленной в виде графа

Путь между двумя вершинами называется кратчайшим, если его стоимость минимальна среди стоимостей всех возможных путей между этими двумя вершинами. Между парой вершин, очевидно, может быть несколько кратчайших путей одинаковой стоимости. Если в графе между двумя вершинами нет ребра, то его вес полагается равным бесконечности. Это логично, поскольку в этом случае он не должен входить ни в один кратчайший путь.

В табл.1 приведен сравнительный анализ алгоритмов, применяемых при решении задачи поиска кратчайшего пути в графе.

Для практической реализации был выбран алгоритм Дейкстры, так как он полностью удовлетворяет требованиям поставленной задачи, удобен в практической реализации и обладает наилучшим быстродействием в своем классе.

Алгоритм Дейкстры решает проблемы поиска кратчайшего пути между любыми выбранными вершинами для ориентированного или неориентированного графа с неотрицательным весом ребер [3].

Формальное описание алгоритма следующее. Пусть $D(v)$ равно сумме весов связей для данного пути. Пусть $C(i, j)$ равно весу связи между узлами с номерами i и j. Далее следует последовательность шагов, реализующих алгоритм [4].

Таблица 1

Сравнительный обзор основных алгоритмов поиска кратчайшего пути

Алгоритм	Объект работы	Действие	Сложность
Поиск в ширину	Невзвешенный граф	Поиск кратчайшего расстояния от одной вершины до всех остальных, определение количества компонент связности	$O(N^2)$
Алгоритм Дейкстры	Граф без рёбер отрицательного веса	Поиск кратчайшего расстояния от одной вершины до всех остальных	$O(N^2)$
Алгоритм Форда-Беллмана	Взвешенный граф	Поиск кратчайшего расстояния от одной вершины до всех остальных	$O(N^3)$
Алгоритм Флойда-Уоршолла	Взвешенный граф	Поиск кратчайшего расстояния между каждой парой вершин	$O(N^3)$

1. Устанавливаем множество узлов $N = \{1\}$.

2. Для каждого узла v не из множества N устанавливаем $D(v) = c(1, v)$.

3. Для каждого шага находим узел w не из множества N, для которого $D(w)$ минимально, и добавляем узел w в множество N.

4. Актуализируем $D(v)$ для всех узлов не из множества N $D(v) = \min\{D(v), D(v) + c(w, v)\}$.

5. Повторяем шаги 2-4, пока все узлы не окажутся в множестве N.

Алгоритм реализовывался для процессора BlackFin ADSP-BF533 фирмы Analog Devices. Данный процессор является представителем семейства 16-разрядных DSP с расширенными возможностями, которые обладают заметно большей производительностью и меньшей потребляемой мощностью по сравнению с предыдущими процессорами семейства BlackFin. Архитектура ядра процессора включает ядро обработки сигналов со сдвоенным блоком умножения-накопления, имеющее ортогональный набор команд, характерный для RISC-микропроцессоров, и обладающее гибкостью команд типа SIMD и мультимедийными возможностями.

Особенностью продуктов семейства BlackFin является динамическое управление питанием. Возможность изменения как напряжения питания, так и рабочей частоты позволяет оптимизировать потребление мощности в соответствии с конкретной задачей. Это свойство делает данное семейство очень привлекательным для применения в мобильных системах, где время автономной работы устройства является одним из ключевых параметров системы.

Проект реализовывался в интегрированной среде разработки для процессоров Analog Devices VisualDSP++ 4.0. Объем объектного файла составил 7 Кбайт при размере исполняемого файла (ELF) 80 Кбайт.

Для отладки и измерения производительности алгоритма была реализована программа в среде MATLAB 6.5 для генерации случайных таблиц связности сети произвольного размера. Таблица представляет собой набор из единиц и нулей, обозначающих, что связь между узлами есть или нет соответственно. Для примера представлена таблица связности, соответствующая графу, изображенному на рис.1.

Таблица 2

Таблица связности для графа, представленного на рис.1

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	0	0	0	0	1	0	1
2	0	0	0	0	0	1	1
3	0	0	0	0	1	0	0
4	0	0	0	0	1	0	0
5	1	0	1	1	0	0	1
6	0	1	0	0	0	0	0
7	1	1	0	0	0	1	0

Алгоритм Дейкстры ищет кратчайшие пути из данной вершины во все остальные, имея при этом квадратичную сложность (нужно N раз просмотреть массив из N элементов). Однако для практического применения наиболее интересен поиск пути из одной вершины в другую. В общем случае это время случайно и ограниченно только сверху. Поэтому для оценки времени поиска между двумя узлами применялось усреднение по ансамблю реализаций (считалось среднее время поиска по 1000 случайным матрицам данного размера). Тестирование скорости алгоритма происходило на тактовой частоте процессора 200 МГц.

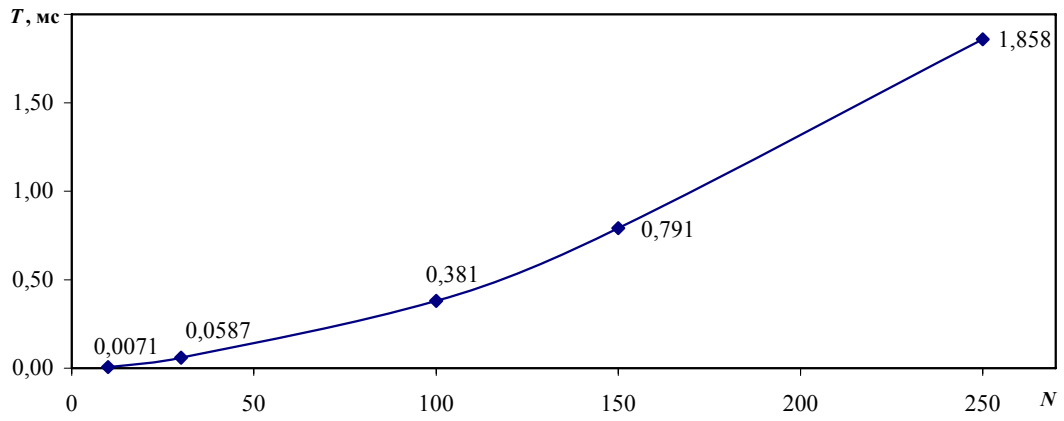


Рис.2. Зависимость среднего времени поиска от числа узлов в сети

На рис.3 точками отмечено время поиска кратчайшего пути между двумя узлами сети, содержащей 10, 30, 100, 150 и 250 абонентов. Таким образом, видно, что если за интервал обновления маршрута взять 1 с, то в сети из 250 абонентов расчёт маршрута между двумя узлами занимает не более 0,2% времени.

Из изложенного ясно, что процессоры BlackFin действительно могут взять на себя маршрутизацию пакетов в реальной мобильной сети как одну из выполняемых ими подзадач в устройствах связи.

Практический интерес вызывает вопрос, можно ли использовать микроконтроллеры другого семейства для реализации вышеописанного алгоритма поиска кратчайшего пути между двумя точками?

Широкое распространение получили 8-разрядные микроконтроллеры фирмы Atmel, которые изготавливаются по малопотребляющей КМОП-технологии, позволяющей в сочетании с усовершенствованной RISC-архитектурой достичь наилучшего соотношения показателей цена / быстродействие / энергопотребление. Типичная розничная цена микроконтроллера средней сложности в индустриальном исполнении – 2…3$.

Основными проблемами, с которыми столкнулся разработчик при создании программы – это объём памяти данных (которая занимается непосредственно прикладной программой) и ОЗУ (где хранится таблица связности сети; массив расстояний – здесь: количество шагов, за которое можно попасть из одной вершины в другую вершину, матрица флагов и маршрута между заданными вершинами графа).

Память данных на основе статического ОЗУ составляет для разных контроллеров семейства AVR от 64 Байт до 4 Кбайт. Память программ (flash) при этом колеблется в пределах от 1 Кбайта для AT90S1200 и ATtiny11 до 128 Кбайт для ATMega128.

Алгоритм Дейкстры реализован в программной среде AVR-Studio фирмы Atmel. Объектный файл программы, реализующей данный алгоритм, занимает 4923 байтов (причём сам алгоритм без ввода данных – 790 байт). Объём ОЗУ, который необходим для того, чтобы программа работала адекватно, приблизительно равен 1000 байтам (эти данные справедливы лишь для условия, когда количество вершин графа не превышает 30). То есть очевидно, что не всякий контроллер AVR может быть использован для нахождения минимального расстояния между двумя вершинами графа, если в графе больше, чем 30 вершин, и вообще для реализации вышеописанного алгоритма.

Объём оперативной памяти микроконтроллеров AVR семейства Mega составляет от 1 до 4 Кбайт. Если посчитать, то при использовании микроконтроллера ATmega64 или ATmega128 (ОЗУ которых как раз достигает 4 Кбайт) алгоритм нахождения минимального расстояния между двумя вершинами графа может быть реализован для 63 вершин, что для решения задачи маршрутизации может оказаться недостаточным. Но здесь есть выход за счёт некоторого аппаратного усложнения. Микроконтроллеры ATMega8515x, ATMega161x, ATMega162x, ATMega64x и ATMega128x имеют возможность подключения внешнего статического ОЗУ объёмом до 64 Кбайт. То есть с учётом встроенной оперативной памяти получается 68 Кбайт, а значит, количество вершин графа может быть увеличено до 260.

Вариантом реализации, экономящим память, может служить передача данных не в байтах, а в битах. То есть за каждый элемент матрицы расстояний отвечает не байт со значением 1(0), а

бит с аналогичным значением. Это значительно экономит память данных, хотя и увеличивает время обработки запроса пользователя примерно вдвое. Во всяком случае, для 170 вершин (абонентов) оказывается достаточным даже встроенного ОЗУ 4 Кбайт.

Алгоритм построен таким образом, что одновременно с т.н. матрицей расстояний идёт заполнение «матрицы маршрутов» (в ячейке, соответствующей текущему номеру вершины, запоминается номер предыдущей вершины графа с минимальным путём до текущей вершины). Таким образом, к концу определения наименьшего расстояния между двумя вершинами графа образовалась матрица, содержащая в каждой ячейке номер предыдущей точки маршрута. Двигаясь «обратно», получаем требуемый маршрут от конечной вершины до исходной.

Тестирование алгоритма для 30 вершин графа проходило при тактовой частоте 16 МГц. Максимальное время, требуемое для определения расстояния от задаваемой вершины графа до всех остальных, составило 19 мс. Для 250 абонентов сети это время увеличится примерно до 1400 мс.

Таким образом, если полученные цифры удовлетворяют условиям возникающей задачи, то микроконтроллеры семейства AVR вполне подходят для определения оптимального пути пакетов от источника к приемнику.

При этом, если для расчёта маршрута использовать отдельный микроконтроллер, время обновления маршрутов для сети из 250 абонентов составит менее 1,5 секунд, что явно достаточно для реальных мобильных сетей.

Из этих результатов следует важный практический вывод: в настоящее время темп обновления маршрутных таблиц в реальном устройстве сдерживается не вычислительными возможностями аппаратуры, а ограничивается лишь темпом и объёмом поступающих абоненту таблиц связанности, т.е. ограничивается пропускной способностью сети.

Литература

1. *Берж К.* Теория графов и ее применение: пер. с франц. / К.Берж; под ред. И.А. Вайнштейна. – М. : Иностр. лит-ра, 1962.

2. *Вишневский В.М.* Теоретические основы проектирования компьютерных сетей / В.М. Вишневский. – М. : Изд-во Техносфера, 2003.

3. *Керниган Б.* Язык С : пер. с англ. / Б. Керниган, Д. Ричи. – СПб. : Питер, 2001.

4. *Оре О.* Теория графов : пер. с англ. / О. Оре ; под ред. Н.Н. Воробьева. – М. : Наука, 1980.

5. *Свами М.* Графы, сети и алгоритмы : пер. с англ. / М. Свами; под ред. В.А. Горбатова. – М. : Мир, 1984.

6. *Таненбаум Э.* Компьютерные сети : пер. с англ. – 4-е изд. / Э. Таненбаум. – СПб. : Питер, 2003.

7. *Хелеби С.* Принципы маршрутизации в Internet : пер. с англ. – 2-е изд. / С.Хелеби. – М. : Издат. дом "Вильямс", 2001.

Получено 4.03.06г.

УДК 621.391

ОПТИМИЗАЦИЯ ПОИСКА ШИРОКОПОЛОСНЫХ СИГНАЛОВ В СПУТНИКОВЫХ ЛИНИЯХ СВЯЗИ

А.Г. ФИЛАТОВ

Предложен метод оптимизации циклического последовательного поиска ШПС сигнала в условиях неопределенности по несущей частоте и тактовой частоте ПСП, позволяющий при заданных параметрах канала, времени поиска, вероятности успеха и отношения сигнал/шум минимизировать число требуемых корреляционных каналов.

В настоящее время в спутниковых системах связи используются широкополосные сигналы (ШПС). При этом символы дискретного сообщения манипулируют ШПС, представляющим собой псевдослучайную последовательность (ПСП) с тактовой частотой примерно равной половине полосы результирующего сигнала. Кроме этого, используется неманипулированный ШПС для выполнения временной синхронизации опорного генератора ПСП по моменту прихода и тактовой частоте сигнала. Синхронизация по моменту прихода определяет моменты начала формирования опорных ШПС сигналов в корреляционных приемниках. Тактовая синхронизация определяет частоту следования элементов ПСП [1].

Синхронизация выполняется методом последовательного поиска [2], используя один или несколько корреляционных каналов, при этом область неопределенности последовательно просматривается с дискретом в один элемент ПСП. Останавливать поиск можно при превышении решающей величиной определенного порога или сканировать всю область и выбирать максимальный результат. При априорно неизвестном отношении сигнал/шум (ОСШ), второй вариант является более предпочтительным, поскольку при несовпадении принимаемой и опорной ПСП на малом сигнале на выходе корреляционного канала наблюдается в основном шум, а на большем – боковые выбросы автокорреляционной функции ШПС. В результате в первом случае порог обнаружения необходимо адаптировать по ОСШ, которое на этапе поиска, как правило, неизвестно.

Во втором случае по завершении просмотра всей области неопределенности проверяется сдвиг ПСП с максимальным корреляционным откликом и при положительном результате проверки поиск заканчивается. Иначе аналогичным образом выполняется следующий цикл поиска.

Особенностью спутниковых линий связи является большая неопределенность по несущей частоте сигнала и тактовой частоте ШПС вследствие эффекта Доплера. Сдвиг несущей частоты ограничивает величину когерентного накопления в корреляционных каналах при поиске, что в случае низкого ОСШ требует дополнительного некогерентного накопления. Ошибка по тактовой частоте ШПС вносит существенные коррективы в характер поиска, а именно увеличивает область неопределенности на величину ухода синхронизации за время поиска, ограничивает время анализа в корреляционном канале, а также обуславливает необходимость дополнительного поиска в области обнаруженного максимума, поскольку на момент завершения прохода он может сместиться на несколько дискретов.

Таким образом, проектирование устройств поиска ШПС в спутниковых каналах имеет ряд особенностей, которые необходимо учитывать при определении минимально необходимого числа корреляционных каналов. При этом требуется решить две задачи:

- определить величину когерентного накопления в поисковом корреляторе, исходя из соотношения тактовой частоты ШПС и частоты Доплера;
- определить число последетекторных накоплений, при котором число необходимых корреляционных каналов минимально.

На рис.1 представлена функциональная схема поискового корреляционного канала.

Данная схема включает генератор ПСП, два коррелятора на синфазную и квадратурную составляющую входного сигнала, использующих перемножитель с опорной ПСП и интегратор, детектор огибающей (ДО) и интегратор, выполняющий последетекторное накопление. В данной статье рассматривается линейный ДО, поскольку при цифровой реализации поискового устройства реализовать его проще.

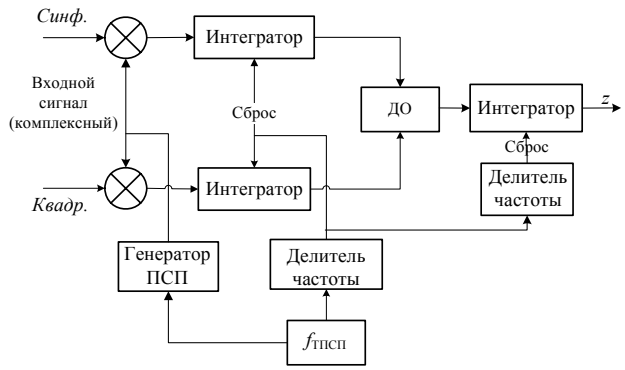


Рис.1. Схема поискового коррелятора

При отстройке несущей частоты на величину $\Delta f_{\text{Д}}$ зависимость ОСШ на входе ДО $h^2_{\text{вх ДО}}$ от величины накопления в элементах ПСП n и входного ОСШ $h^2_{\text{вх}}$ можно выразить как

$$h^2_{\text{вх ДО}} = \frac{\left[\sum_{t=0}^{n-1}\cos\left(2\pi\frac{\Delta f_{\text{Д}}}{f_{\text{ТПСП}}}t\right)\right]^2+\left[\sum_{t=0}^{n-1}\sin\left(2\pi\frac{\Delta f_{\text{Д}}}{f_{\text{ТПСП}}}t\right)\right]^2}{n} h^2_{\text{вх}}, \quad (1)$$

где $f_{\text{ТПСП}}$ – частота следования элементов ПСП.

Выигрыш по ОСШ равный $h^2_{\text{вх ДО}}/h^2_{\text{вх}}$ от величины накопления в корреляторе n, вычисленный с помощью (1), представлен на рис.2 (непрерывная линия). Там же представлен выигрыш при $\Delta f_{\text{Д}} = 0$ (пунктирная линия).

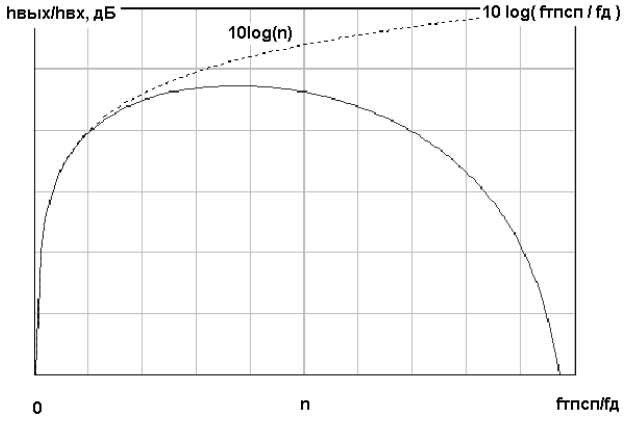


Рис.2. Зависимость выигрыша по ОСШ на выходе коррелятора от величины накопления

Из рисунка следует, что максимум $h^2_{\text{вх ДО}}$ достигается при $n \approx 0{,}375\, f_{\text{ТПСП}}/\Delta f_{\text{Д}}$. Следует отметить, что, начиная с $n \approx 0{,}25\, f_{\text{ТПСП}}/\Delta f_{\text{Д}}$, рост уже незначителен, в связи с чем для поиска целесообразно выбирать именно эту величину когерентного накопления. Так, для $f_{\text{ТПСП}}/\Delta f_{\text{Д}} = 1000$ максимальный выигрыш $h^2_{\text{вх ДО}}/h^2_{\text{вх}}$ при $n = 375$ составляет 23,6 дБ, а при $n = 250$ выигрыш равен 23,1 дБ.

Блок-схема поискового устройства, представленного на рис.3, включает K корреляционных каналов, построенных по схеме рис.1, схему выбора максимального корреляционного отклика, устройства проверки найденной позиции и устройства управления.

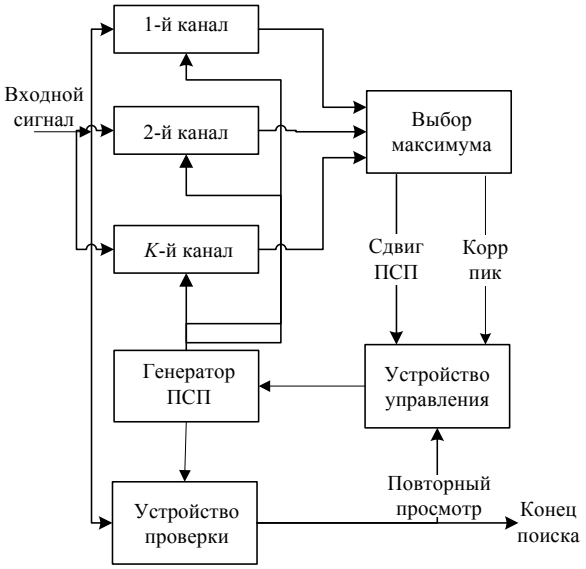


Рис.3. Блок-схема поискового устройства

Рассмотрим поиск, предполагающий просмотр всей области неопределенности с шагом в один такт ПСП, выбор максимального корреляционного пика и его проверку. В данном случае поиск завершается за один проход при условии, что корреляционный пик при синхронных принимаемой и опорной ПСП будет больше, чем при всех несинхронизованных сдвигах. Вероятность этого события равна

$$Q_1(h) = \int_0^{\infty} W_1(x,h)\left[\int_0^{x} W_0(y)dy\right]^{A-1} dx, \quad (2)$$

где A – размер области неопределенности в элементах ПСП, $W_0(x)$ и $W_1(x,h)$ – плотности распределения вероятности (ПРВ) решающей величины на выходе корреляционного канала при гипотезах “сигнала нет” и “сигнал есть”. При слабом сигнале, когда боковые лепестки автокорреляционной функции сигнала можно не рассматри-

вать, и большем числе последетекторных накоплений m данные ПРВ гауссовские с нормированными на n матожиданием и дисперсией:

$$M_{\Sigma 0} = m\sqrt{\frac{\pi}{2}},\ D_{\Sigma 0} = m\left(2 - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$M_{\Sigma 1} = \sum_{k=1}^{m} M_1\left(h_{\text{вх ДО}}\left(n, m, \Delta f_{\text{Д}}, \Delta f_{\text{ТПСП}}, h_{\text{вх}}\right)\right), \quad (3)$$

$$D_{\Sigma 1} = \sum_{k=1}^{m} D_1\left(h_{\text{вх ДО}}\left(n, m, \Delta f_{\text{Д}}, \Delta f_{\text{ТПСП}}, h_{\text{вх}}\right)\right),$$

где $M_{\Sigma 0}$, $D_{\Sigma 0}$ – матожидание и дисперсия сигнала на выходе корреляционного канала при рассогласовании принимаемого и опорного ШПС; $M_{\Sigma 1}$ $D_{\Sigma 1}$ – при совпадении принимаемого и опорного ШПС.

Функция $M_1(h)$ и $D_1(h)$, входящие в (3), равны [3]:

$$M_1(h) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \left(I_0\left(h^2/4\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{h^2}{2}\left(I_0\left(h^2/4\right) + I_1\left(h^2/4\right)\right)\right) \cdot e^{-\frac{h^2}{4}}, \quad (4)$$

$$D_1(h) = 2 + h^2 - M_1(h)^2,$$

где h^2 – ОСШ на входе ДО:

$$h^2{}_{\text{вх ДО}}\left(n, m, \Delta f_{\text{Д}}, \Delta f_{\text{ТПСП}}, h_{\text{вх}}\right) =$$

$$= \sin c\left(\pi n m \frac{\Delta f_{\text{ТПСП}}}{f_{\text{ТПСП}}}\right)^2 \times \left\{\frac{\left[\sum_{t=0}^{n-1} \cos\left(2\pi \frac{\Delta f_{\text{Д}}}{f_{\text{ТПСП}}} t\right)\right]^2}{n} + \right.$$

$$\left. + \frac{\left[\sum_{t=0}^{n-1} \sin\left(2\pi \frac{\Delta f_{\text{Д}}}{f_{\text{ТПСП}}} t\right)\right]^2}{n}\right\} h^2_{\text{вх}}, \quad (5)$$

где $\sin c(x) = \sin(x)/x$.

Первый множитель в выражении (5) отражает рассинхронизацию из-за рассогласования тактовой частоты ПСП $\Delta f_{\text{ТПСП}}$ при условии, что спектр принимаемого полезного сигнала постоянен в диапазоне $[-f_{\text{ТПСП}}/2,\ f_{\text{ТПСП}}/2]$ и равен нулю за его пределами, а второй – выигрыш (1) от когерентного накопления при рассогласовании несущей частоты на $\Delta f_{\text{Д}}$. Результирующее ОСШ на выходе корреляционного канала после когерентного и некогерентного накоплений может быть рассчитано как [3]:

$$h^2_{\text{вых}}\left(n, m, \Delta f_{\text{Д}}, \Delta f_{\text{ТПСП}}, h_{\text{вх}}\right) =$$

$$= \frac{\left(M_{\Sigma 1}\left(n, m, \Delta f_{\text{Д}}, \Delta f_{\text{ТПСП}}, h_{\text{вх}}\right) - M_{\Sigma 0}\right)^2}{D_{\Sigma 1}\left(n, m, \Delta f_{\text{Д}}, \Delta f_{\text{ТПСП}}, h_{\text{вх}}\right)}. \quad (6)$$

Зависимости данной величины от числа некогерентных накоплений m для $f_{\text{ТПСП}} = 3$ МГц и $h^2_{\text{вх}} = -30$ дБ приведены на рис.4.

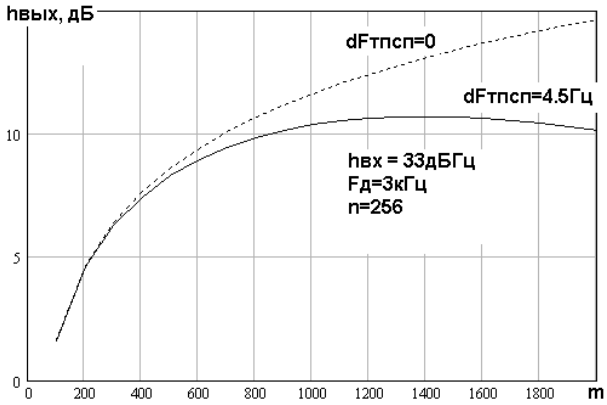


Рис.4. Зависимость ОСШ на выходе корреляционного канала от числа последетекторных накоплений

В результате при ненулевом рассогласовании тактовых частот $\Delta f_{\text{ТПСП}}$ принимаемого и опорного ШПС выходное ОСШ сначала растет, а потом медленно снижается, после чего выполнять последетекторные накопления не имеет смысла. При этом рост выигрыша по ОСШ от последетекторного накопления наблюдается, когда «уход» синхронизации за интервал анализа составляет не более 1/2 элемента ПСП.

Вероятность правильного завершения поиска за N проходов равна

$$Q_{\Sigma}(h, N) = \sum_{i=1}^{N} Q_1(h)\left(1 - Q_1(h)\right)^{i-1} = \quad (7)$$

$$= 1 - \left(1 - Q_1(h)\right)^N,$$

откуда следует:

$$N_{\text{прох}} = \left\lceil \ln\left(1 - Q_{\Sigma}\right) / \ln\left(1 - Q_1\right) \right\rceil. \quad (8)$$

Подставляя в выражения для числовых характеристик (3) и (4) значение ОСШ (5) и используя данные характеристики для получения ПРВ, входящих в (2), можно рассчитать вероятность правильного завершения поиска за один

проход Q_1, затем, используя (8), число проходов $N_{\text{прох}}$, требуемое для достижения заданной вероятности успеха Q_Σ.

Таким образом, исходя из времени поиска $T_{\max}$ и вероятности правильного завершения Q_Σ, можно найти зависимость числа корреляционных каналов K от числа некогерентных накоплений m и выбрать m, приводящее к минимальному K. Для этого надо представить время одного прохода всей области неопределенности, с учетом просмотра дополнительных позиций на уход синхронизации, от m и K:

$$T_{\text{прох}}(m,K) = \frac{\dfrac{A\cdot n\cdot m}{f_{\text{ТПСП}}\cdot K}}{1-\dfrac{\Delta f_{\text{ТПСП}}\cdot n\cdot m}{f_{\text{ТПСП}}\cdot K}} = \frac{A\cdot n\cdot m}{f_{\text{ТПСП}}\cdot K-\Delta f_{\text{ТПСП}}\cdot n\cdot m}, \quad (9)$$

откуда следует, что

$$K = \left\lceil \frac{A\cdot n\cdot m}{T_{\text{прох}}\cdot f_{\text{ТПСП}}} + \frac{\Delta f_{\text{ТПСП}}}{f_{\text{ТПСП}}}\cdot n\cdot m \right\rceil. \quad (10)$$

С другой стороны, чтобы за отведенное время $T_{\max}$ можно было выполнить $N_{\text{прох}}$ проходов по всей области неопределенности, время одного прохода должно быть:

$$T_{\text{прох}} = \frac{T_{\max}-T_{\text{пров}}}{N_{\text{прох}}}, \quad (11)$$

где $T_{\text{пров}}$ – время проверки найденной позиции, которое учитывается один раз, поскольку во время проверки поисковые каналы продолжают просмотр. Как правило, данная величина существенно меньше времени просмотра области неопределенности и при оптимизации ею можно пренебречь.

В результате финальная вероятность правильного поиска (7) является функцией входного ОСШ $h^2_{\text{вх}}$, величины области неопределенности A, доплеровского отклонения частоты $\Delta f_{\text{Д}}$, рассогласования тактовых частот ПСП $\Delta f_{\text{ТПСП}}$, числа когерентных и некогерентных накоплений n и m, а также числа корреляционных каналов K. Величину n выбирают так, чтобы получить максимум выражения $h^2_{\text{вх ДО}}$ по (1) и затем минимизируют K по m, с тем чтобы выполнялись требования по финальной вероятности правильного обнаружения Q и требуемому времени поиска $T_{\max}$.

В качестве примера рассмотрим оптимизацию поискового устройства для системы связи с ШПС, период повторения которого составляет $A = 1023$, $f_{\text{ТПСП}} = 3$ МГц. При этом поиск необходимо выполнять в диапазоне ОСШ $h^2_{\text{вх}} = -30...40$ дБ, при рассогласовании частоты за счет эффекта Доплера $\Delta f_{\text{Д}} < 3$ кГц и рассогласовании тактовых частот ПСП $\Delta f_{\text{ТПСП}} < 4{,}5$ Гц за время не более $T_{\max} = 20$ с с вероятностью $Q = 0{,}9$. Процедура оптимизации поиска в данном случае заключается в следующем:

- Исходя из соотношения величин $\Delta f_{\text{Д}}$ и $f_{\text{ТПСП}}$ и используя (1), определим величину когерентного накопления $n = 256$. При $h^2_{\text{вх}} = -30$ дБ ОСШ на входе ДО составит –7 дБ.
- Зададим несколько значений для числа некогерентных накоплений m с тем условием, чтобы ОСШ на выходе корреляционного канала (6) было больше 0 дБ, например $m = 256$, 512, 768, 1024, 1280.
- Используя (2) и (8), определим число проходов циклического последовательного поиска $N_{\text{прох}}$, требуемое для достижения заданной вероятности успеха $Q = 0{,}9$ для всех m.
- Получив с помощью (11) требуемое время одного прохода и подставляя его в (10), найдем значения числа корреляционных каналов K для всех m.
- Выберем такое m, при котором K минимально.

Результаты оптимизации представлены в таблице.

Характеристики поискового устройства при ОСШ = 30 дБ, $\Delta f_{\text{Д}} = 3$ кГц, $\Delta f_{\text{ТПСП}} = 4{,}5$ Гц, $n = 256$

m	256	512	768	1024	1280
Вероятность успеха за проход Q_1	0,06	0,15	0,24	0,29	0,31
Число проходов $N_{\text{прох}}$	37	14	9	7	6
Число каналов K	42	32	31	32	35
Вероятность успеха Q_Σ	0,9	0,9	0,91	0,91	0,9
Время поиска T_Σ, с	19,7	19,7	19,7	19,8	19,4

Из таблицы следует, что наилучший результат имеет место при числе некогерентных накоплений $m = 768$, а поисковое устройство в данных условиях должно включать $K = 31$ корреляционный канал.

Таким образом, получен алгоритм оптимизации поисковых устройств систем связи с ШПС в условиях неопределенности по несущей частоте сигнала и тактовой частоте ШПС, позволяющий, исходя из требований к временным и вероятностным характеристикам поиска, определить минимально необходимое число корреляционных каналов, а также оптимальные величины когерентного и некогерентного накоплений.

Литература

1. *Журавлев В.И.* Поиск и синхронизация в широкополосных системах / В.И. Журавлев. – М. : Радио и связь, 1986. – 240 с., ил.

2. *Филатов А.Г.* Об эффективности когерентного накопления энергии при последовательном поиске сигнала в частотном диапазоне // Методы и устройства обработки сигналов: Межвуз. сб. науч. тр. / А.Г. Филатов. – Воронеж : ВПИ, 1996. С. 44–49.

3. *Гоноровский И.С.* Радиотехнические цепи и сигналы / И.С. Гоноровский. – М. : Сов. радио, 1977.

Получено: 15.01.07г.

УДК 621.391

ФОРМАЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ МАРШРУТИЗАЦИИ

А.А. ДОНЧЕНКО, А.А. НОВОПОЛЬЦЕВ, А.А. ПОДЛЕЖАНСКИЙ

Рассматривается задача оптимизации маршрутизации для сетей связи по различным видам критериев. Приведены условия, позволяющие обосновать требования к различным показателям плана распределения информации.

При эксплуатации сети возникает множество нештатных ситуаций, обусловленных нестационарностью входящей нагрузки и конечной надежностью элементов сети и требующих либо автоматических управляющих воздействий, либо вмешательства оператора сети. Каждая такая ситуация порождает специфическую прикладную задачу, при решении которой и определяется вид соответствующего управляющего воздействия. Информационное обеспечение и решение таких задач производится, как правило, в системах поддержки сетевого управления, которые вырабатывают рекомендации оператору по необходимым текущим управляющим действиям [1].

Для решения прикладных задач сетевого управления и разработки приложений управления необходимо математическое моделирование процессов управления сетью и ее элементами. Моделирование позволяет определить пороговые значения параметров работы сети, при достижении которых становится необходимым то или иное управляющее воздействие на элементы сети. Математическое моделирование процессов управления сетью является едва ли не самым важным и одновременно сложным направлением работ при проектировании и внедрении сетевого управления современными сетями связи. Количество прикладных задач управления весьма велико. Кроме того, вряд ли удастся формализовать и промоделировать все возможные ситуации на сети. Однако банк решений, составляющих приложения управления, постоянно растет.

Формулировка задачи. Основной задачей маршрутизации является выбор определенного пути из множества разрешенных между любыми двумя узлами коммутации (УК) (источником и адресатом) с помощью матриц (таблиц) маршрутов [2]. Матрица маршрутов A_i i-го УК задает очередность или вероятности выбора исходящих направлений при установлении соединений из i-го узла к любому (r-му) узлу сети. Совокупность маршрутных матриц $\left\{A_i, i=\overline{1,N}\right\}$ является планом распределения информации. В соответствии с критерием оптимальности маршрута для каждой ветви, входящей в различные маршруты, определяется некоторый вес. Маршрут с минимальным (максимальным) суммарным весом является оптимальным по данному критерию. Различные критерии оптимизации порождают различные планы маршрутизации. Аналогично, использование разных общесетевых и индивидуальных критериев оптимизации маршрутизации также приводит к несовпадающим решениям. Поэтому не существует универсальной маршрутизации [3]. Однако общая постановка задачи оптимизации плана распределения информации (маршрутизации) может быть сформулирована, если не конкретизировать вид критерия. Она может быть следующей. Пусть задан граф сети G (N,M), в котором множество вершин $\{N\}$ соответствует УК с пропускными способностями $C_i(t)$, $i=\overline{1,N}$, множество ребер $\{M\}$ – ветвям связи с пропускными способностями $C_{ij}(t)$, $\{M\}=\left\{i, j;\ i=\overline{1,N},\right.$ $\left. j=\overline{1,A_i},\ A_i\in[1,\ N-1],\ i\neq j,\ \forall i,j\right\}$, A_i – количество ребер (ветвей), исходящих из УК$_i$.

Оптимизация осуществляется на интервале управления T_α. Величина его выбирается таким образом, чтобы не было превышено значение $T_{\text{изм}}$ – интервала времени между зафиксированными изменениями в сети (функциональными и структурными), т.е. должно выполняться условие

$$T_\alpha \le T_{\text{изм}}. \qquad (1)$$

Предполагается также, что соблюдается еще одно условие, куда входит значение T_α:

$$T_{\text{пси}} << T_\alpha, \qquad (2)$$

где $T_{\text{пси}}$ – суммарное время передачи контрольной информации об изменениях в сети, выработ-

ки управляющего воздействия (решения соответствующих оптимизационных задач) и передачи служебной управляющей информации.

Условие (2) позволяет обосновать требования к временным характеристикам алгоритмов адаптивной маршрутизации.

Входящий поток характеризуется набором функций $\lambda_{ir}(t)$, $i,r=\overline{1,N}$. Величина $\lambda_{ir}(t)$ представляет собой интенсивность входящего потока в узле *i,* адресованного *r*-му узлу.

Учет условий (1) позволяет исключить время из рассмотрения и пользоваться следующими параметрами:

$$\left\|C_{ij}(t)\right\|_{t\in T_\alpha}=C_{1\alpha}=\left\|C_{ij}\right\|,$$

$$\left(C_i(t)\right)\Big|_{t\in T_\alpha}=C_{2\alpha}=\left(C_i\right), \qquad (3)$$

$$\Lambda_{\text{вх}}(t)=\left\|\lambda_{ir}(t)\right\|_{t\in T_\alpha}=\Lambda_{\text{вх}\alpha}=\left\|\lambda_{ir}\right\|. \qquad (4)$$

Маршрутные коэффициенты в матрице маршрутов определяются как

$$P_{ij}=\left\{p_{ikj}\ge 0,\ (i,k,j)\in\{M\}\right\}, \qquad (5)$$

где p_{ikj} – часть полного потока $\lambda_{i(j)}$, направляемого по *к*-й ветви из узла *i,* адресованного $УК_j$.

Кроме того, должны выполняться условия

$$\sum_{k=1}^{A_i}p_{ikj}=1;\ p_{ikj}\ge 0;\ i,k=\overline{1,N};\ j=\overline{1,A_i}. \qquad (6)$$

Интенсивности потоков в ветвях сети определяются следующим образом:

$$\lambda_{ik}=\sum_j p_{ikj}\lambda_{i(j)},\ i,k=\overline{1,N},\ j=\overline{1,\ A_i}, \qquad (7)$$

где λ_{ik} – интенсивность потока в ветви, соединяющей $УК_i$ и $УК_k$.

Интенсивность полного потока в $УК_i$, адресованного $УК_r$, определяются как:

$$\lambda_{i(r)}=\lambda_{ir}+\sum_{k=1}^{N}p_{kir}\lambda_{k(r)}\,. \qquad (8)$$

Должны также выполняться условия

$$\lambda_{ij}<\mu_{ij},\ i=\overline{1,\ N},\ j=\overline{1,\ A_i}, \qquad (9)$$

где μ_{ij} – интенсивность обслуживания на ветви ij, зависящая от величин C_{ij} и C_i.

Для сетей с маршрутизацией по маршрутным переменным (коммутация пакетов – датаграммный режим (КП-Д), сообщений (КС), каналов (КК)) оптимизационная задача формулируется так:

$$\Omega\left(\Lambda_{\text{вх}\alpha},\ C_{1\alpha},\ C_{2\alpha},\ P_{ij}\right)\Rightarrow\max_{P_{ij}} \qquad (10)$$

при условиях (1)-(9), $\Omega(\bullet)$ – целевая функция.

Для сетей с обходными маршрутами (КК, коммутация пакетов – виртуальный режим (КП-В)) условия (1)-(9) по-прежнему включаются в формулировку оптимизационной задачи, меняется, однако, вид целевой функции:

$$\Omega\left(\Lambda_{\text{вх}\alpha},\ C_{1\alpha},\ C_{2\alpha}\right)\Rightarrow\max_{U_\alpha}, \qquad (11)$$

где U_α – управление, когда разрешено использование кратчайших и обходных маршрутов для части или для всех потоков в сети.

Для реальных сетей с ненадежными каналами и конечным временем доведения управляющих воздействий до управляемых объектов в формулировку задач (10), (1)-(9) и (11), (1)-(9) (далее задач I и II соответственно) необходимо включать еще одно условие:

$$U_\alpha=U_{\alpha\ \text{исп}}, \qquad (12)$$

где $U_{\alpha\ \text{исп}}$ – исполненное управляющее воздействие.

Если при решении задач I и II условие (1) не учитывается, т.е. полагается, что сеть не изменяется на протяжении всего периода рассмотрения T, то речь идет о статической маршрутизации. В общем же случаи, при соблюдении условия (1) и

$$T=\sum T_\alpha, \qquad (13)$$

вводят понятие адаптивной маршрутизации.

При определенных условиях задачи I и II могут существенно упрощаться. Важнейший из путей упрощения – разбиение исходной задачи для всей сети на совокупность *N* узловых задач, когда каждый УК принимает решения по маршрутизации сообщений независимо от других, т.е. может быть построен распределенный алгоритм маршрутизации. Такое преобразование может быть точным или приближенным. В первом случае совокупность узловых решений обеспечивает оптимальный план распределения потоков в целом в сети, во втором речь может идти лишь о степени близости к общему оптимальному решению. Точное разбиение возможно при

выполнении ряда существенных условий. Прежде всего необходимо, чтобы целевая функция была адаптивной или мультипликативной относительно переменных p_{ijr}, т.е. должна представлять собой сумму или произведение функций, каждая из которых зависит только от своих узловых переменных. Во-вторых, что также обязательно, переменные p_{ijr} не должны зависеть от r, т.е. независимыми должны быть p_{ij}:

$$p_{ijr} = f_{ij}(\lambda_{ij}) = p_{ij},\ \forall_{i,j,r} \in M. \qquad (14)$$

При этом обмен служебной информацией между УК не нужен, т.е. может быть построен полностью распределенный алгоритм маршрутизации. И, наконец, входной поток также не должен зависеть от r, поскольку в противном случае функционирование каждого из узлов зависит от всех остальных узлов, и о точном разбиении задачи не может быть и речи.

В реальной сети $p_{ijr} = f(\Lambda_{\Sigma\alpha}),\quad \Lambda_{\Sigma\alpha} = \sum\sum\lambda_{ir}$. Поэтому для построения оптимальной распределенной маршрутизации, помимо выполнения других условий, необходим обмен служебной информацией между УК, при этом принципиальное значение приобретает условие $U_\alpha = U_{\alpha\ \text{исп}}$, которое может быть выполнено при соответствующих временных характеристиках алгоритмов адаптивной маршрутизации.

Отсюда следуют такие утверждения:

1. По целевой функции $\Omega(\bullet)$ произвольного вида может быть найден оптимальный план распределения информации (оптимальная маршрутизация) для сети связи с заданной $\Lambda_{\Sigma\alpha}$ на интервале управления T_α при полной наблюдаемости сети и выполнении условия $T_\alpha \geq T_{пси}$. При этом если сеть наблюдается в одной точке, то будет осуществляться централизованная стратегия маршрутизации; если во многих точках при обмене служебной управляющей информацией между ними – децентрализованная (распределенная) стратегия маршрутизации.

2. Полностью оптимальная распределенная маршрутизация в сети, не требующая обмена служебной информацией между точками наблюдения, может быть осуществлена в сети по целевой функции $\Omega(\bullet)$, являющейся сепарабельной функцией от переменных маршрутизации в точках наблюдения. Кроме того, должны соблюдаться сформулированные выше требования к p_{ijr} и λ_{ir}. Так как в общем случае $p_{ijr} = f\left(\Lambda_\Sigma\right)$ для $\forall i,\ r, j \in M$, то не существует оптимальной распределенной маршрутизации без обмена служебной информацией между УК (для существования такой маршрутизации необходимо выполнение условий (14)).

3. При статической маршрутизации условие $T_\alpha \geq T_{\text{пси}}$ не учитывается, при адаптивной это условие приобретает определяющее значение.

Задача нахождения оптимальной статической маршрутизации совпадает с задачей I при отсутствии условия $T_\alpha \leq T_{\text{изм}}$ и представляет, по существу, задачу распределения потоков информации в сети.

Если $p_{ijr} = \begin{cases} 1, \text{ при } j = 1, \\ 0, \text{ при } j \neq 1, \end{cases}$ то при решении задачи I будет найдено распределение потоков при фиксированной маршрутизации.

Методы решения задач I и II существенно зависят от вида целевой функции $\Omega(\bullet)$ и, следовательно, для сетей с различными видами коммутации будут различны.

Особенностью алгоритмов оптимизации управления сложными системами по задачам I и II является наличие неопределенности относительно среды проектирования и состояний элементов систем. Это обстоятельство может приводить к ошибкам в принятии решений, появляющимся при работе алгоритмов управления. Поэтому полагаются априори справедливыми следующие допущения, позволяющие считать найденные управляющие решения стохастически устойчивыми [4, 5]:

1. сетеметрия сети связи использует методы оптимальной организации обработки измерений параметров среды проектирования, позволяющих максимально снизить априорную неопределенность в их значениях;

2. статистическая обработка наблюдений позволяет заменить стохастическую оптимизационную задачу детерминированной путем замены компонентов случайных векторов среды проектирования их математическими ожиданиями;

3. для решения задач I и II в необходимых случаях применяются соответствующие обобщения целевых функций и ограничений по пространству среды проектирования;

4. оптимальное управление в задачах I и II возможно определить, используя допущение о полной наблюдаемости сети (полной информации). Это означает, что при условии выполнения требования к времени сбора и обработки

информации о состоянии сети, не превышающему величины времени изменения среды проектирования, точность решения будет зависеть от того, насколько можно считать выполненным условие о мгновенном исполнении управляющего воздействия $U_{\alpha\ \text{исп}} = U_{\alpha}$ на интервале $T_{\alpha-1} < t \le T_{\alpha}$. Другими словами, если скорость передачи служебной управляющей информации высока, и за время передачи управляющего решения не произойдет изменения сложившейся ситуации в сети, то можно получить требуемую точность реального управления. Полагается, что время реакции системы управления таково, что справедливо $U_{\alpha\ \text{исп}} = U_{\alpha}$.

Сформулированные положения можно рассматривать как внешние требования к показателям сетеметрии и скорости передачи служебной информации системы динамического управления.

Заключение. В статье рассмотрена задача оптимизации маршрутизации для сетей связи по различным видам критериев. Приведены условия, позволяющие обосновать требования к различным показателям плана распределения информации, что позволит при эксплуатации сети решить ряд специфических прикладных задач, порождаемых множеством нештатных ситуаций, обусловленных нестационарностью входящей нагрузки и конечной надежностью элементов сети.

Литература

1. Протоколы и методы управления в сетях передачи данных / Под ред. Ф.Ф. Куо. – М. : Радио и связь, 1985.

2. *Бертсекас Д.* Сети передачи данных / Д. Бертсекас, Р. Галлагер. – М. : Мир, 1989. – 348 с.

3. *Корнышев Ю.Н.* Теория распределения информации / Ю.Н. Корнышев, Г.Л. Фань. – М. : Радио и связь, 1985. – 184 с.

4. *Захаров Г.П.* Принципы построения системы управления цифровой сетью связи / Г.П. Захаров, Н.П. Крутякова // Техника средств связи. Сер. ТПС. – 1992. – Вып. 7; 10.

5. *Крутякова Н.П.* Системное проектирование сети связи / Н.П. Крутякова. // Техника средств связи. Сер. ТПС. – 1990. – Вып. 10. – С. 41–53.

Получено 12.04.06г.

УДК 621.396

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РАЗДЕЛЕНИЯ СИГНАЛОВ В ОХРАННО-СИГНАЛИЗАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ СВЯЗИ

Г.Б. ВОЛОБУЕВ, Н.Н. СЕМЕНОВ, В.Д. ЛУКЬЯНЧИКОВ, В.И. ЛЕДОВСКИХ

Рассматриваются охранно-сигнализационные системы связи, в которых для устранения взаимного подавления сигналов от сигнализационных устройств используются датчики случайных чисел, позволяющие почти на порядок повысить помехоустойчивость связи.

Охранно-сигнализационные системы связи (ОСС) включают в себя определенное число N сигнализационных устройств (СУ) того или иного типа, размещенных на контролируемой территории и срабатывающих при несанкционированном доступе на нее различных объектов. Для передачи их сигналов часто используется один узкополосный канал, который в общем случае может содержать ретрансляторы (РТ).

В ОСС передача информации от каждого СУ в большинстве случаев осуществляется спорадически короткими сеансами, продолжительность которых может быть существенно (на несколько порядков) меньше продолжительности пауз между ними. Поэтому, кроме надежной синхронизации, необходимой для получения максимального значения вероятности правильного приема сообщений, требуется обеспечить весьма малые (10^{-10} или меньше) значения вероятности ложных обнаружений сигнала в дежурном режиме. Это достигается использованием специального синхросигнала. Способы передачи синхросигнала могут быть различными. Его элементы могут передаваться отдельно от сообщения (непосредственно перед ним) или совместно. Ниже ограничимся рассмотрением случая раздельной передачи синхросигнала и сообщения. Будем полагать, что РТ отсутствуют, сообщения всех СУ содержат свои адресные элементы, вместе с синхросигналом имеют длительность T и передаются по одному узкополосному каналу связи с гауссовой помехой непосредственно на центральную станцию (ЦС).

При использовании общего радиоканала при расчете помехоустойчивости связи необходимо учитывать взаимное подавление сигналов различных СУ, вероятность которых зависит от интенсивности потоков сообщений. Задачи, подобные указанной, неоднократно решались в прошлом, например, применительно к многоканальным асинхронно-адресным импульсным системам связи [1]. Для уменьшения вероятности подавления сообщений были предложены различные методы временного и частотно-временного кодирования сигналов.

В рассматриваемой ОСС применение таких сигналов нецелесообразно из-за существенного увеличения длительности синхросигнала и сообщения. Кроме того, в ОСС практически всегда имеется обратный канал, используемый для передачи служебной информации от ЦС к СУ, который может быть использован определенным образом и для уменьшения вероятности взаимного подавления сигналов СУ.

Естественно, что наиболее эффективным явилось бы применение обратного канала для классического временного разделения сигналов СУ. Однако это приведет к существенной задержке сообщений некоторых из них, особенно при большом их числе, что для ОСС является неприемлемым. Поэтому поступим по-другому. Примем, что при передаче сообщений используется обнаруживающий ошибки код и решающая обратная связь (РОС) с ограниченным числом повторений r, при которой ЦС передает сигнал подтверждения (синхросигнал) по обратному каналу только в случае правильного приема синхросигнала и необнаружения ошибок в принятом сообщении.

Будем полагать, что сигнал определенного СУ подавляется, если он частично или полностью перекрывается по времени с сигналом хотя бы одного из $(N-1)$ СУ на входе приемного устройства ЦС. Сигнал подтверждения при этом не посылается и СУ осуществляет повторную передачу сообщения. Очевидно, что применение только одной РОС не позволит разделить сигналы СУ, поскольку их наложение произойдет и при повторных передачах. Поэтому в каждом СУ необходимо включить датчик случайных равновероятных чисел, по команде которого повторная пере-

дача сообщения осуществлялась бы в один из x неперекрывающихся интервалов времени. Естественно, что при достаточно большой вероятности перекрытия сигналов трех и большего числа СУ это приведет к существенному увеличению числа x и, как следствие, занятости канала связи.

Найдем вероятность подавления сообщения одного СУ хотя бы двумя сигналами остальных $(N-1)$ СУ – $P(s\ge 2, N-1, 2T)$, представляющую собой совместную вероятность нахождения моментов появления по крайней мере двух из $(N-1)$ сигналов в интервале времени $[t_0-T, t_0+T]$, а остальных – вне этого интервала (t_0 – момент действия первого из сигналов).

Рассмотрим редкую, но в принципе возможную в ОСС ситуацию, когда на интервале времени $\tau > T$ в случайные, независимые и равновероятные моменты времени обязательно происходит однократное срабатывание каждого из N СУ.

Сначала найдем вероятности $P(s=1, N-1, 2T)$ и $P(s=0, N-1, 2T)$. Полагая, что плотность вероятности $w(t_i)$, $(i=\overline{1,N})$, моментов появления сигналов t_i подчиняется равномерному закону, получим

$$P(s=1, N-1, 2T) =$$

$$= \frac{2(N-1)}{\tau^N}\int_0^{\tau}\int_x^{f_1(x)} f_2^{N-2}(x,y)\,dy\,dx, \qquad (1)$$

где

$$f_1(x) = x + \tau\Phi[x-(\tau-T)] + T[1-\Phi[x-(\tau-T)]];$$

$$f_2(x,y) = (x-T)\ (x-T) + [\tau-(y+T)]\ [(\tau-T)-x];$$

$$P(s=0, N-1, 2T) =$$

$$= \frac{2}{\tau^N}\int_0^{T}(\tau-x-T)\,dx + \frac{1}{\tau^N}\int_T^{\tau-T}(\tau-2T)\,dx, \qquad (2)$$

$\Phi(z)$ – функция Хевисайда:

$$\Phi(z) = \begin{cases} 1, & z\ge 0 \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

После интегрирования (1) и (2) окончательно получим:

$$P(s=1,\ N-1,\ 2T) = \frac{2(\tau-2T)}{\tau^N}\times$$

$$\times[(\tau-2T)^{N-1} - (\tau-3T)^{N-1}] +$$

$$+\frac{2}{N\tau^N}\left[(\tau-T)^N - 2(\tau-2T)^N + (\tau-3T)^N\right], \quad (3)$$

$$P(s=0,\ N-1,\ 2T) =$$

$$= \frac{1}{N\tau^N}\left[2(\tau-T)^N + (N-2)(\tau-2T)^N\right]. \qquad (4)$$

При этом, очевидно, $P(s\ge 2,\ N-1,\ 2T) = 1 - P\times$ $\times(s=1,\ N-1,\ 2T) - P(s=0,\ N-1,\ 2T)$.

На рис.1 приведены линии зависимости $P(s=1,\ N-1,\ 2T) = P_1$ для $T = 0{,}02$с и $N = 10;50$ от интенсивности потоков сообщений $\lambda = 1/\tau$, рассчитанные в соответствии с (1), а на рис.2 – сплошными линиями – значения $\alpha = P\times$ $\times(s\ge 2,\ N-1,\ 2T)/P(s=1,\ N-1,\ 2T)$ при тех же значениях T и N.

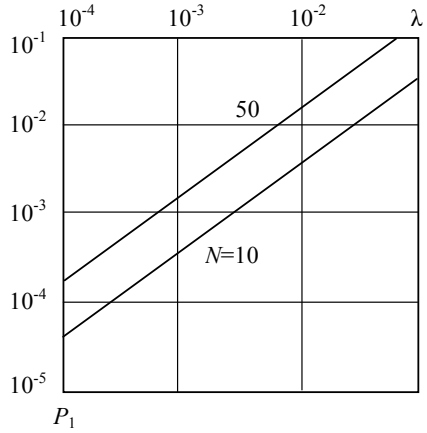


Рис.1. Линии зависимости вероятности подавления сообщение одного СУ одним из (N-1) других СУ от интенсивности потока сообщений λ

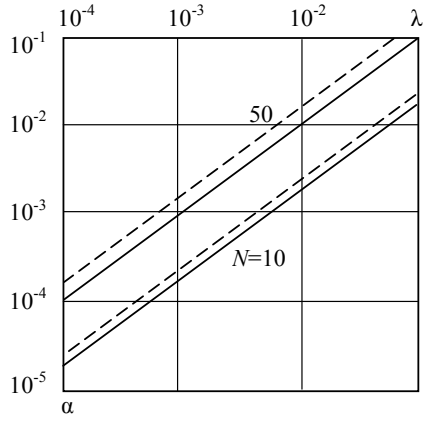


Рис.2. Линии зависимости коэффициента α от интенсивности потока сообщений λ (сплошные линии для рассматриваемой модели подавления сообщений, пунктирные – при пуассоновской модели)

Из рис.1 видно, что вероятность подавления P_1 при увеличении λ меняется в пределах от $4\cdot10^{-5}$ до 10^{-1}, а рис.2 показывает, что во всем диапазоне значений λ вероятность $P(s\ge 2,\ N-1,\ 2T)$ на порядок или несколько порядков меньше вероятности P_1. Таким образом, в рассматриваемом случае вероятностью подавления сообщения в ОСС сигналами двух или большего числа СУ можно пренебречь.

Известно, что в импульсных системах связи для описания потоков сообщений при их малой интенсивности часто используется пуассоновский поток с законом распределения [1,2]

$$P(s,t)=\frac{(\lambda t)^S}{s!}e^{-\lambda t}, \qquad (5)$$

где $P(s,t)$ – вероятность наступления ровно S событий в интервале времени t. Такое представление потоков позволяет существенно упростить вероятностные расчеты. Так, например, выражения (1) и (2) при этом примут следующий вид:

$$P(s=1,\ N-1,\ 2T)=$$

$$=2(N-1)\lambda T\left[\exp(-2\lambda T)\right]^{N-1}, \qquad (6)$$

$$P(s=0,\ N-1,\ 2T)=\left[\exp(-2\lambda T)\right]^{N-1}. \qquad (7)$$

Расчеты, проведенные в соответствии с (6) и (7), показали, что значения $P(s=1,\ N-1,\ 2T)$ получаются точно такими же, что и на рис.1, а значения α (см. пунктирные линии на рис.2) мало отличаются от полученных выше. Таким образом, даже при относительно больших значениях интенсивности λ пуассоновская модель дает хорошие результаты и может быть использована для вероятностных расчетов применительно к ОСС.

Теперь оценим помехоустойчивость связи в ОСС с учетом подавлений сигнала. Рассмотрим ОСС с узкополосной ЧМ, при которой в качестве демодулятора при приеме используется частотный детектор. Для исключения постоянной составляющей сигнала, имеющейся на его выходе, обычно включается разделительный конденсатор. Чтобы исключить при этом дрейф постоянной составляющей на выходе последнего, при передаче двоичных символов сигнала используется манчестерский код [3]. Будем полагать, что исходный синхросигнал каждого СУ представляет собой m-элементную псевдослучайную последовательность (ПСП), а информационное сообщение имеет длину n, кратную четырем. Для каждой четверки символов применяется код Хэмминга (8, 4), гарантированно обнаруживающий одно- и двукратные (и некоторые – большей кратности) ошибки, а его декодирование при приеме осуществляется после накопления элементов манчестерского кода.

Вероятность ложного обнаружения сообщения при указанных условиях будет равно $P_{\text{л}}=P_{\text{л}1}\cdot P_{\text{л}2}$, где $P_{\text{л}1}$ и $P_{\text{л}2}$ вероятности формирования помехой при приеме разрешенных кодовых комбинаций сообщения и ложного синхросигнала, соответственно. Очевидно, что $P_{\text{л}1}=(0,5)^{4\kappa}$, где κ – число кодовых комбинаций в сообщении, а $P_{\text{л}2}=(0,5)^{2m}\sum_{i=0}^{j}C_{2m}^{i}$, где C_j^i – биномиальный коэффициент.

Для получения в ОСС требуемого значения $P_{\text{л}}$ необходимо, таким образом, обеспечить определенную величину $P_{\text{л}2}$, которая зависит от выбранного значения m и метода приема синхросигнала. В рассматриваемом случае оптимальным методом является его поэлементный прием с последующим накоплением элементов (вычислением автокорреляционной функции) и сравнением полученного результата с пороговым значением V (V – целое, $V\le 2m$).

Как показали предварительные расчеты, вполне удовлетворительные результаты для длин сообщений $n>16-24$ дает применение в качестве синхросигнала тринадцатиэлементного кода Баркера ($m=13$) [4]. На рис.3 приведена кривая зависимости $P_{\text{л}2}$ от $j=2m-V$, где j – допустимое число искаженных элементов синхросигнала, при котором он считается принятым правильно.

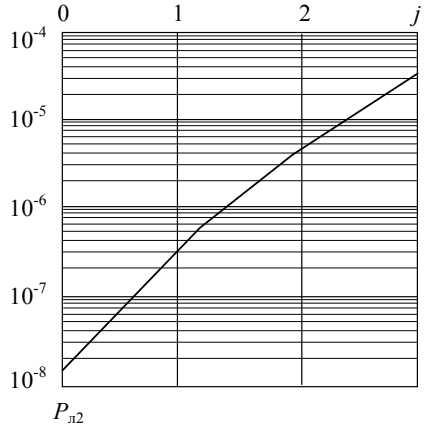


Рис.3. Кривая зависимости вероятности ложного обнаружения синхросигнала от допустимого числа искаженных элементов j

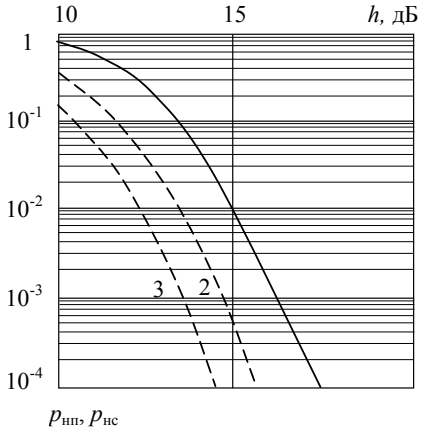


Рис.4. Кривые зависимости вероятности пропуска синхросигнала $p_{нс}$ (пунктирные линии) и ошибочного приема сообщения (сплошная линия) от сокращения с/ш h

При $j=2$, как видно из него, $P_{л2}=5\cdot10^{-6}$. Если принять $P_{л1}=10^{-8}$, то получим $P_{л}=5\cdot10^{-14}$. Например, вероятность ложной тревоги $P_{лт}$ на интервале времени равном $T_с$ примерно равна $P_{л}T_с/T_о$, где $T_о$ – длительность элементов сигнала. Если принять $T_с$ равным одним суткам, т.е. $T_с=24\cdot36\cdot10^5$, а $T_о=0,5$ мс, то при $P_{л}=10^{-14}$ получим $P_{лт}\approx10^{-5}$, что соответствует появлению ложной тревоги в среднем один раз за 10^5 суток.

Для расчета вероятности правильного приема сообщения P(пп) в ОСС с РОС примем, что вероятности ошибочного приема символов синхросигнала и сообщения при ЧМ соответственно равны [5]

$$q=0,5\left[1-erf\left(h/3,2\right)\right]$$

и

$$p=0,5\left[1-erf\left(h/1,6\sqrt{2}\right)\right], \qquad (8)$$

где $erf(z)$ – функция ошибок, $h^2=E/N_о$ (E – энергия сигнала, $N_о$ – спектральная плотность мощности шума). Тогда выражения для вероятностей правильного приема $2m$-элементного синхросигнала $p_{пс}$, $2n$-элементного сообщения $p_{пп}$ и обнаружения ошибок в сообщении $p_{оо}$ при его передаче по прямому каналу примут следующий вид:

$$p_{пс}=\sum_{i=0}^{j}C_{2m}^{i}q^{i}\left(1-q\right)^{2m-i},\ p_{пп}=\left(1-p\right)^{2n},$$

$$p_{оо}\cong1-\left[1-\sum_{i=1}^{2}C_{8}^{i}p^{i}\left(1-p\right)^{8-i}\right]^{k}. \qquad (9)$$

На рис.4 приведены кривые зависимости вероятности пропуска (неприема) синхросигнала $p_{нс}=\left(1-p_{пс}\right)$ при $j=2;3$ и ошибочного приема сообщения $p_{нп}=\left(1-p_{пп}\right)$ для $n=24$ (соответственно пунктиром и сплошной линией). Из рис.4 видно, что для практически используемых значений $h>12\div15$ дБ $p_{нс}<<p_{нп}$ и передача синхросигнала мало повлияет на окончательный результат приема сообщения. Будем полагать ниже, что $j=2$. Пренебрегая, ввиду малости, вероятностью подавления сигнала сигналами разных СУ дважды при его передачах в ОСС с РОС и вероятностью формирования ложного синхросигнала (сигнала подтверждения) в обратном канале, для ОСС с РОС получим следующий вероятностный граф, показанный на рис.5:

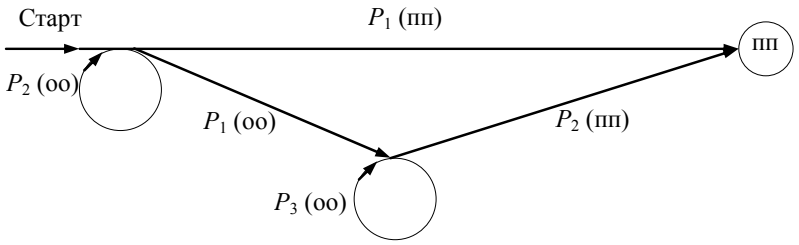


Рис.5. Вероятностный граф для ОС с решающей обратной связью с учетом подавлений сигналов СУ

Здесь $P_1(оо)=p_{пд}$;

$$P_2(оо)=(1-p_{пд})[(1-p_{пс})+p_{пс}\cdot p_{оо}],$$

$$P_3\left(оо\right)=c+\left(1-c\right)\left[\left(1-p_{пс}\right)+p_{пс}\cdot p_{оо}\right];$$

$$P_1\left(пп\right)=\left(1-p_{пд}\right)\cdot p_{пс}\cdot p_{пп}, \qquad (10)$$

$$P_2\left(пп\right)=\left(1-c\right)\cdot p_{пс}\cdot p_{пп},\ c=1/x,$$

$$p_{пд}=P\left(s=1,\ N-1,\ 2T\right)=$$

$$=2\left(N-1\right)\lambda T=\left[\exp\left(-2\lambda T\right)\right]^{N-1},$$

событие пп – правильный прием сообщения.

В соответствии с рис.5 выражение для вероятности правильного приема сообщения P(пп) примет вид

$$P(\text{пп}) = p_{\text{пс}} p_{\text{пп}} \sum_{i=0}^{\text{r}} P_2^i(\text{оо}) f(r-i), \qquad (11)$$

где $f(R) = \left[\left(1-p_{\text{пд}}\right) + p_{\text{пд}}\left(1-c\right)\right] \dfrac{1-\left[P_3(\text{оо})\right]^R}{1-P_3(\text{оо})}$.

Значение c, представляющее собой вероятность каждого из чисел x датчика случайных чисел СУ, заметно убывает только при небольших значениях $x = 2-4$. Поэтому для дальнейшего примем $x = 4$.

На рис.6 сплошными линиями представлены рассчитанные в соответствии с (11) кривые зависимости вероятности неприема сообщения $P(\text{нп}) = 1 - P(\text{пп})$ от отношения с/ш h для значений $n = 24$, $m = 13$, $N = 20$, $j = 2$, $T = 0{,}02$ с, $c = 0{,}25$ и значений $\lambda = 10^{-3}$; 10^{-2} и 10^{-1} (кривые 3, 2, 1). Там же для сравнения пунктирными линиями нанесены такие же зависимости для случая $c = 1$ (т.е. при отсутствии в СУ датчиков случайных чисел). Из него видно, что применение датчиков дает наилучший результат при относительно больших значениях h. Уменьшение интенсивности λ приводит к повышению помехоустойчивости связи.

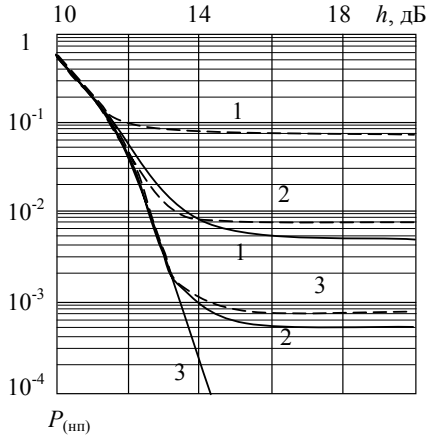


Рис.6. Кривые зависимости вероятности неприема сообщения P(нп) от отношения с/ш h при наличии (сплошные линии) и отсутствии (пунктирные линии) датчиков случайных чисел в СУ.

Обычно в ОСС требуется обеспечить вероятность правильного приема сообщения $P(\text{пп}) \geq 0{,}99$ $\left(P(\text{нп}) \leq 10^{-2}\right)$. В крайне неблагоприятном случае, когда все СУ срабатывают на интервале времени $\tau = 10$ с$\left(\lambda = 10^{-1}\ 1/\text{с}.\right)$, при длительности сигнала $T = 0{,}02$ с. такое значение P(пп) достигается при $h \geq 13$ дБ. При отсутствии датчиков в СУ P(пп) = 0,92.

Применение для передачи символов сообщения манчестерского кода позволяет осуществить несколько отличный от рассмотренного выше алгоритм работы ОСС. Манчестерский код является для двоичных символов кодом с проверкой на нечетность, поэтому можно воспользоваться его обнаруживающей способностью и не применять при передаче код Хэмминга. Тогда выражения для вероятностей правильного приема сообщения и обнаружения ошибок в нем примут следующий вид:

$$p_{\text{пп}} = \left(1-q\right)^{2\text{п}} \text{ и } p_{\text{оо}} = 1 - \left[1 - 2q\left(1-q\right)\right]^{\text{п}}. \qquad (12)$$

Подставив полученные выражения в (10), можно найти вероятности P(пп) и P(нп) для этого варианта ОСС. Кривые зависимости P(нп) от h для тех же, что и раньше значений n, m, N, j, T, c и λ, представлены на рис.7.

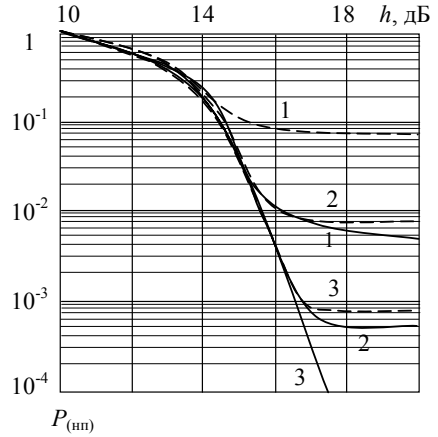


Рис.7. Кривые зависимости вероятности неприема сообщения P(нп) от отношения с/ш h при наличии (сплошные линии) и отсутствии (пунктирные линии) датчиков случайных чисел в СУ при использовании манчестерского кода

Применение манчестерского кода для целей обнаружения ошибок, как нетрудно видеть из рис.7, требует для получения тех же, что и полученных выше значений P(нп), отношения с/ш большего на 3 дБ. Сравнение обоих вариантов ОСС при одной и той же энергии сигнала дает в отношении помехоустойчивости связи почти одинаковые результаты.

Таким образом, применение в СУ для целей разделений сигналов датчиков случайных чисел позволяется примерно на порядок повысить по-

мехоустойчивость связи в ОСС при любых интенсивностях передаваемых сообщений. Для повышения чувствительности приемника для обнаружения ошибок при приеме целесообразно использовать код Хэмминга.

Литература

1. *Лившиц А.Р.* Многоканальные асинхронные системы передачи информации / А.Р. Лившиц, А.П. Биленко. – М. : Связь, 1974. – 232с.

2. *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника / В.И. Тихонов. – М. : Радио и связь, 1982. – 622с.

3. *Спилкер Дж.* Цифровая спутниковая связь / Спилкер Дж. – М. : Связь, 1979. – 591с.

4. *Варакин Л.Е.* Теория систем сигналов / Л.Е. Варакин. – М. : Сов. радио, 1978. – 304с.

5. *Финк Л.М.* Теория передачи дискретных сообщений / Л.М. Финк. – М. : Сов. радио, 1970. – 728с.

Получено 19.04.06г.

УДК 621.396.662

СРАВНИТЕЛЬНАЯ ОЦЕНКА КОММУТАЦИОННЫХ СПОСОБОВ УМЕНЬШЕНИЯ ВРЕМЕНИ ПЕРЕСТРОЙКИ СЧ-ИФАПЧ ПО ЧАСТОТЕ

С.К. РОМАНОВ, Н.М. ТИХОМИРОВ, М.Н. ТИХОМИРОВ, И.А. МАРКОВ

Найдены аналитические выражения для определения длительностей переходных процессов при перестройке по частоте синтезаторов с элементами коммутации и с учётом режима скольжения. Проведено сравнение результатов расчётов по этим выражениям и результатов моделирования переходных процессов в синтезаторе на основе системы ИФАПЧ третьего порядка с использованием среды визуального моделирования SIMULINK системы математических расчётов MatLab.

В синтезаторах частот (СЧ), использующих технологию ИФАПЧ (СЧ-ИФАПЧ), с «большими» (октава и более) диапазонами перестройки по частоте в начале переходного процесса (ПП) возникает режим биений [1] или так называемый режим скольжения (РС) [2,3]. Этот режим характерен тем, что фазовое рассогласование сигналов на входах частотно-фазового детектора (ЧФД) с тремя состояниями и зарядовой накачкой (ЗН), используемого в ИФАПЧ, больше значения 2π. Применение дробных делителей с переменным коэффициентом деления (ДДПКД) в астатической системе ИФАПЧ с частотно-фазовым пропорционально-интегральным регулированием приводит к увеличению длительностей ПП, так как доля времени существования РС в общем времени ПП зачастую становится недопустимо высокой. Для уменьшения времени протекания этого явления, а также уменьшения общего времени ПП в СЧ-ИФАПЧ производителями однокристальных интегральных микросхем синтезаторов предлагается ряд способов, связанных с коммутацией значений определённых параметров элементов схемы, находящихся как внутри (делители частоты и ЗН), так и снаружи этих микросхем (фильтр нижних частот (ФНЧ)). При ускоренных способах перестройки по частоте в СЧ-ИФАПЧ согласно предложениям фирм производителей необходимо осуществлять:

1. Увеличение выходного тока заряда или разряда ЗН, возможное уменьшение коэффициентов деления частот, как опорного сигнала, так и сигнала в обратной связи цепи ИФАПЧ, одновременное уменьшение постоянных времени ФНЧ (в СЧ-ИФАПЧ типа ADF4154, ADF4193, LMX2306/16/26 этот способ ускорения ПП получил название «FastLock» - «Быстрый захват» (БЗ) [4,5]).

2. Использование механизма увеличения выходного тока двух отдельных пропорциональной (ПЗН) и интегральной зарядовых накачек (ИЗН) наряду с повышением основного тока накачки на начальном ускоренном этапе перестройки частоты в СЧ-ИФАПЧ типа NJ88C50, UMA1018, SA8016/8026/8028 этот технический приём форсирования ПП носит название "Speedup" - «Способ с двумя зарядовыми накачками» (ДЗН) [6,7]).

3. Увеличение значения коэффициента деления ДДПКД наряду с уменьшением величины частоты сравнения FR в ЧФД и повышением тока накачки ЗН на время ПП при смене частот (в СЧ-ИФАПЧ типа LMX2470, LMX2485, ADF4156 этот механизм ускорения ПП известен как «Cycle slip reduction» (CSR) - «Способ устранения режима скольжения» (УРС) [2,3]).

В отечественной и зарубежной литературе отсутствуют публикации, в которых бы детально исследовалось качество ПП в системе ИФАПЧ с изложенными выше механизмами ускоренного их протекания и способами коммутации. Так, в работе [1] определяется время ПП в астатической системе ИФАПЧ третьего порядка с РС, но без коммутации. В публикации [8] находится оптимальное время ПП только для линейной непрерывной модели астатической системы ИФАПЧ третьего порядка с реализацией лишь только способа ускорения БЗ.

Целью настоящей работы является нахождение минимального времени ПП в нелинейной системе ИФАПЧ третьего порядка с определенными выше способами ускорения, а также нахождение выигрышей от их реализации.

На рис.1 приведена структурная схема СЧ-ИФАПЧ с коммутацией некоторых параметров и элементов структуры. К традиционным функ-

циональным элементам, таким как делитель частоты опорного сигнала ДФКД, делитель ДДПКД, ЧФД с ЗН, корректирующий ФНЧ (C_1, R_1, C_2) и ГУН (сумматор и усилительно-интегрирующее звено $2\pi \cdot S_{\text{ГУН}} / s$), добавлены дополнительные элементы: таймер – устройство, запускаемое от переднего фронта сигнала $U(t)$ и задающее интервал времени ускорения t_k, управляющее делителями ДФКД и ДДПКД, а также устройствами $K_1(t)$, $K_2(t)$ и ключом КЛ. Напряжение $U(t)$ в начале ПП представляет собой единичную функцию с уровнем амплитуды $U_{\text{М}}$, определяющим диапазон перестройки ГУН выражением $\Delta f_{\text{ГУН}} = f_{\text{ГУН_}}$ в $-f_{\text{ГУН_Н}} = S_{\text{ГУН}} \cdot U_{\text{М}}$, в котором $f_{\text{ГУН_В}}$ – верхняя частота перестройки ГУН, а $f_{\text{ГУН_Н}}$ – нижняя частота перестройки ГУН. Устройства $K_1(t)$, $K_2(t)$ – коммутируемые усилители тока с выхода ПЗН и ИЗН соответственно, а КЛ – ключ, замыкаемый на время ускорения t_k и подключающий резистор R_2 параллельно R_1.

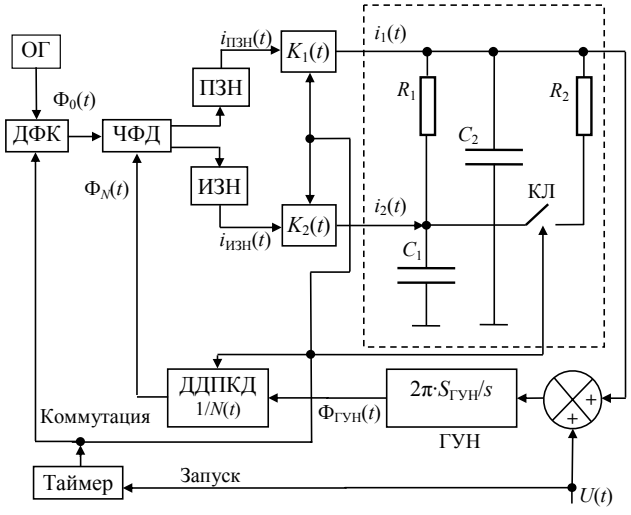


Рис.1. Обобщенная схема СЧ-ИФАПЧ для различных способов ускорения ПП

На рис.1 также приняты следующие обозначения: $\Phi_{\text{О}}(t)$, $\Phi_N(t)$, $\Phi\text{ГУН}(t)$ – фазы сигналов с ДФКД, ДДПКД и ГУН соответственно, $N(t)$ – значение целочисленной части дробного коэффициента деления ДДПКД, $i_1(t)$, $i_2(t)$ – токи накачки ПЗН и ИЗН, увеличенные, как правило, в режиме ускорения ПП.

$F(\varphi_\varepsilon) = F(\Phi_{\text{О}}(t) - \Phi_N(t))$ – нелинейная функция, характеризующая функционирование ЧФД с ЗН и показанная на рис.2, на котором $i_{\text{М}}$ – максимальное значение тока накачки.

Приведённая на рис.2 функция $F(\varphi_\varepsilon)$ является неоднозначной функцией, т.е. если $\varphi_\varepsilon(t)$ – постоянно нарастающая величина ($\dot{\varphi}_\varepsilon(t) > 0$ жирная линия), то $F(\varphi_\varepsilon) > 0$.

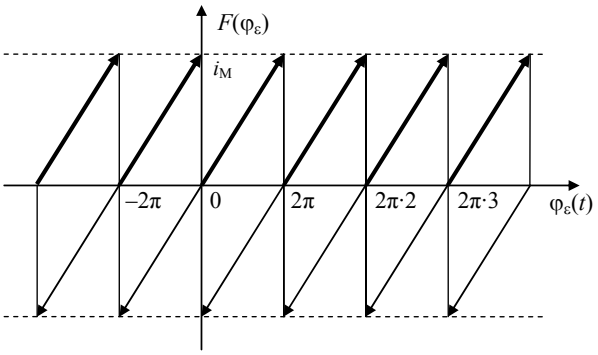


Рис.2. Уточнённая фазовая характеристика ЧФД с ЗН

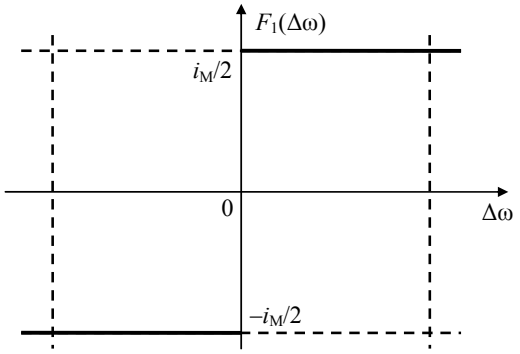


Рис.3. Релейная функция разности частот входных сигналов ЧФД с ЗН

Если функция $\dot{\varphi}_\varepsilon(t)$ меняет знак, то и $F(\varphi_\varepsilon)$ может изменить знак и перейти из положительной области значений в отрицательную (тонкие линии). ЧФД с ЗН помимо такой фазовой характеристики обладает свойством различения по частоте, которое иллюстрируется на рис.3. Здесь $\Delta\omega$ – разность частот между выходными сигналами ДФКД и ДДПКД, а $F_1(\Delta\omega)$ – релейная функция с размахом от $-i_{\text{М}}/2$ до $i_{\text{М}}/2$.

На рис.4 приведены графики ПП в СЧ-ИФАПЧ, схема которого показана на рис.1, со следующими параметрами: $S_{\text{ГУН}}$=15 МГц/В, $\Delta f_{\text{ГУН}}$=450 МГц, $i_{\text{М}}$=0,5 мА. Кроме того, на интервале времени от 0 до t_k: частота среза системы $f_{\text{С}}$=4800 Гц, период опорного сигнала t_0=1,25·10–5/4с, N=27625/4, K_1=4, K_2=0, R_2=R_1/3, ключ КЛ замкнут. На интервале времени от t_k, до $t_{\text{У}}$: $f_{\text{С}}$=1800Гц, t_0=1,25·10^{-5} с, N=27625, K_1=1, K_2=0, ключ КЛ – разомкнут. Здесь $t_{\text{У}}$ – время оконча-

ния ПП по частоте с точностью Δf_ε. В момент коммутации t_k в составе $U(t)$ создан дополнительный скачок напряжения, определяющий помеху коммутации размахом Δf_Π=1000 Гц (факторы, определяющие уровень помехи коммутации подробно обсуждаются в работе [8]).

На рис.4: кривая 1 – $e_У(t)$ – напряжение на выходе ФНЧ, кривая 2 – $\log|(U(t)-e_У(t))\cdot S_{ГУН}|$ – отклонение частоты ГУН от номинала в логарифмическом масштабе, кривая 3 – $U_{ЧФД}(t)=2\pi\cdot F(\varphi_\varepsilon(t))/i_М$ – сигнал, пропорциональный $F(\varphi_\varepsilon(t))$. Из графиков на рис.4 видно, что весь период времени ПП можно разделить на два интервала: первый от 0 до $t_З$ – захват (режим скольжения в системе ИФАПЧ) и второй t_n от $t_З$ до $t_У$ – режим подстройки, в котором система ИФАПЧ является линейной системой третьего порядка. На втором интервале при t=t_k осуществляется коммутация параметров СЧ-ИФАПЧ и поэтому контур автоподстройки можно считать кусочно-линейной системой.

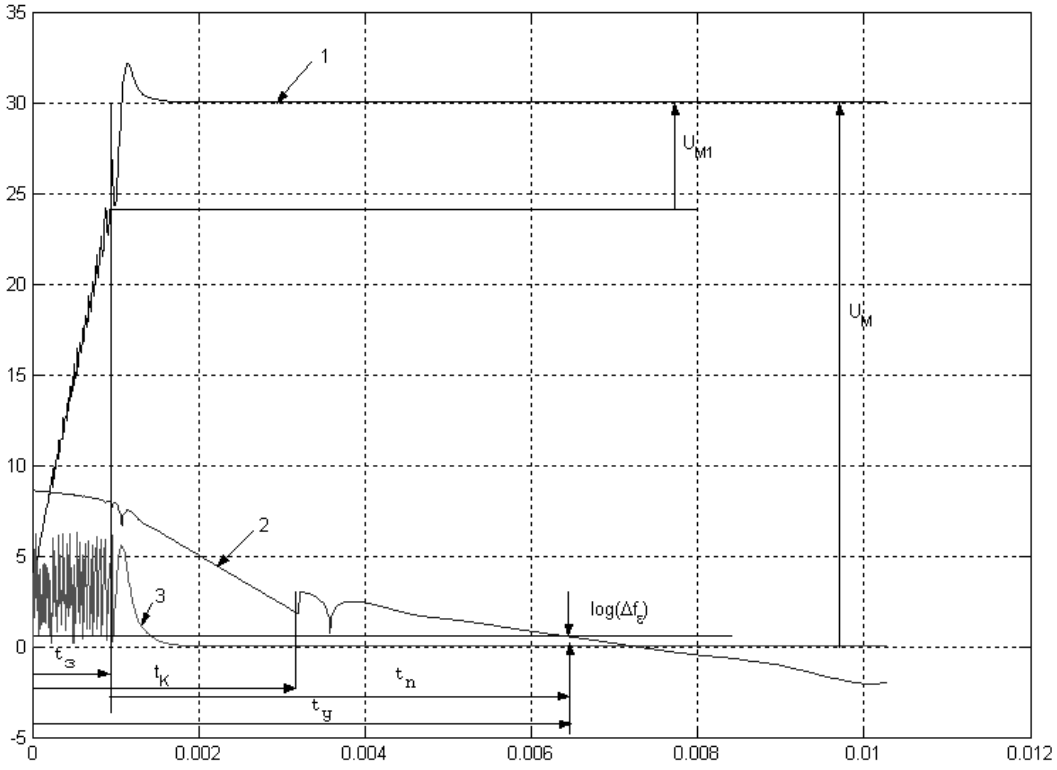


Рис.4. Переходные процессы в СЧ-ИФАПЧ при способе БЗ

Ввиду сложности решения задачи определения времени $t_У$ для СЧ-ИФАПЧ с РС и коммутаций параметров, не приводя дополнительных математических выкладок и поясняющих рисунков, примем следующие допущения:

На интервале от 0 до $t_З$ сумма емкостей конденсаторов ФНЧ C_1+C_2 заряжается постоянным (средним) током $\pm i_М/2$ (в соответствии с рис.1 и рис.3) и напряжение на C_1 и C_2 к моменту t=$t_З$ становится равным $U_{C_1C_2}=\frac{i_М}{2}\cdot\frac{t_З}{C_1+C_2}$.

В момент времени $t_З$ на систему ИФАПЧ действует скачок напряжения $U(t)=U_{М1}\cdot 1(t-t_З)+$ $+U_М\cdot 1(t)-U_М\cdot 1(t-t_З)$,

где $U_{М1}=\frac{i_М\cdot t_{11}}{C_1+C_2}$, $t_{11}=R_1C_2\frac{K_1(0)}{K_1(0)+K_2(0)}$.

Считаем напряжение на конденсаторах C_1 и C_2 равным нулю, а фазу выходного сигнала ГУН ФГУН($t_З$)=0.

Из рис.4 (кривая 2) следует, что при "больших" отклонениях времени (t>>$t_З$, t>>t_k) от моментов возмущений в линейной системе ИФАПЧ ПП для отклонений по частоте можно описывать уравнениями экспоненциальных асимптот:

$$\Delta f(t)=\Delta f_Н\cdot b\cdot\exp\cdot(-\alpha\omega_Б t), \qquad (1)$$

где $\Delta f_{\text{Н}}$ – начальное отклонение по частоте; b и α – некоторые параметры, подлежащие определению:

$\omega_{\text{Б}} = \sqrt{\dfrac{i_{\text{М}} \cdot S_{\text{ГУН}} \cdot (K_1 + K_2)}{(C_1 + C_2) \cdot N}}$ – базовая частота (БЧ) частотной характеристики разомкнутой системы ИФАПЧ;

$\omega_{\text{Б1}} = \sqrt{\dfrac{i_{\text{М}} \cdot S_{\text{ГУН}} \cdot (K_1(0) + K_2(0))}{(C_1 + C_2) \cdot N_1}}$ – БЧ на интервале времени от 0 до t_k;

$\omega_{\text{Б2}} = \sqrt{\dfrac{i_{\text{М}} \cdot S_{\text{ГУН}} \cdot (K_1(t_k) + K_2(t_k))}{(C_1 + C_2) \cdot N_2}}$ – БЧ на интервале времени $t > t_k$.

При этом N_1 и N_2 – коэффициенты деления ДДПКД для $t<t_k$ и $t>t_k$ соответственно.

Условие возникновения РС во время ПП в системе ИФАПЧ можно определить из анализа её линейной модели под воздействием скачка напряжения $U_{\text{М}} \cdot 1(t)$. Оно запишется как $U_{\text{ЧФД}}(t) \geq 2\pi$ и далее трансформируется к виду

$$\frac{\varphi_{\text{М}} \cdot S_{\text{ГУН}} \cdot U_{\text{М}} \cdot 2\pi}{N \cdot \omega_{\text{Б}}} \geq 2\pi, \qquad (2)$$

где $\varphi_{\text{М}}$ – коэффициент, подлежащий определению.

Используя допущения, определяемые выражениями (1) и (2), можно получить выражение для определения t_3:

$$t_3 = \frac{2 \cdot \Delta f_{\text{ГУН}}}{N_1 \cdot \omega_{\text{Б1}}^2} - 2t_{11}. \qquad (3)$$

Если в системе ИФАПЧ не используется коммутация параметров ($K_1(0)=1$, $K_2(0)=0$, $\omega_{\text{Б}} = \omega_{\text{Б1}} = \omega_{\text{Б2}}$) то, используя допущения (1), (2) и (3), продолжительность ПП $t_{\text{у2}}$ можно определить из выражения

$$t_{\text{у2}} = \frac{2 \cdot \Delta f_{\text{ГУН}}}{N_2 \cdot \omega_{\text{Б2}}^2} - 2R_1C_2 + \ln\left[\frac{\Delta f_{\varepsilon}}{N_2 \cdot \omega_{\text{Б1}}^2 \cdot R_1C_2 \cdot b_2}\right] \cdot \frac{1}{-\alpha_2\omega_{\text{Б2}}}. \qquad (4)$$

Для проверки допущений (1), (2) и (3), которые приводят к упрощенному выражению (4) для определения времени $t_{\text{у2}}$, в среде визуального моделирования SIMULINK системы математических расчётов MatLab была разработана модель системы ИФАПЧ, синтезатора по схеме рис.1.

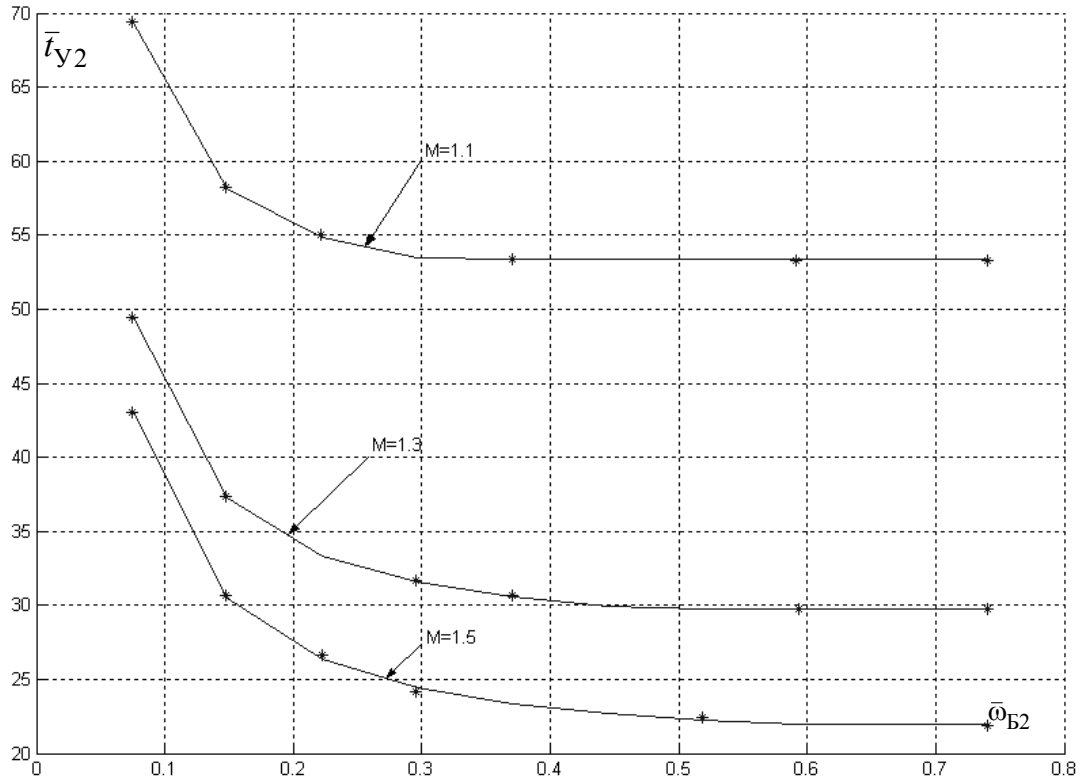


Рис.5. Зависимость времени ПП $\bar{t}_{\text{у2}}$ от базовой частоты $\bar{\omega}_{\text{Б2}}$

Обратимся к графикам на рис.5, где непрерывными линиями приведены результаты расчётов по формуле (4), а звёздочками – результаты моделирования в среде SIMULINK. Параметры исследуемой системы ИФАПЧ определялись с помощью параметрического синтеза на основе понятия показателя колебательности M [9], дополнительно задавались значения $\Delta f_{\text{ГУН}}$=450 МГц, N_2=27625, Δf_{ε}=1 Гц, b_2 и α_2 в соответствии с работой [8] для трёх значений M=1,1, M=1,3 и M=1,5.

На рис.5 по оси абсцисс задавались значения $\overline{\omega}_{\text{Б2}} = \omega_{\text{Б2}} \cdot N_2 / \Delta f_{\text{ГУН}}$ (нормированное значение БЧ), по оси ординат – значения $\overline{t}_{\text{У2}} = \omega_{\text{Б2}} \cdot t_{\text{У2}}$ (нормированное время ПП). Из графиков рис.5 следует, что результаты расчётов по формуле (4) и результаты моделирования очень близки (погрешность <1,5 %). Кроме того, из графиков рис.5 видно, что при $\omega_{\text{Б2}} \cdot N_2 / \Delta f_{\text{ГУН}} < 0{,}1$ время $t_{\text{У2}}$ увеличивается от 1,5 до 2 раз по сравнению с линейным случаем ($\omega_{\text{Б2}} \cdot N_2 / \Delta f_{\text{ГУН}} > 0{,}5$).

Считая, что задача определения величины времени ПП в РС решена (выражение (3) для t_3), перейдем к определению $t_{\text{У}}$ с учётом способов коммутации, воздействия помехи коммутации на ГУН в момент времени t_k и в предположении, что в течение времени $t > t_3$ система ИФАПЧ является линейной. В этот период на ГУН воздействует внешний сигнал

$$U(t) = U_{\text{М1}} \cdot 1(t - t_3) + U_{\text{П}} \cdot 1(t - t_3),$$

где $U_{\text{П}}$ – амплитуда помехи коммутации, создающая скачок частоты $\Delta f_{\text{П}} = U_{\text{П}} \cdot S_{\text{ГУН}}$.

Для решения поставленной задачи воспользуемся методом пространства состояний. В качестве состояний примем напряжения $U_{C1}(t)$ и $U_{C2}(t)$ на конденсаторах C_1, C_2 соответственно и фазу сигнала ГУН ФГУН(t), а в качестве выходного сигнала примем отклонение частоты ГУН от номинала $\Delta\omega_{\text{ГУН}} = 2\pi \cdot S_{\text{ГУН}} \cdot U_{C1}(t)$. Тогда в соответствии с рис.1 дифференциальное уравнение, описывающее систему ИФАПЧ, имеет вид

$$\left.\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{U} \\ \mathbf{Y} &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{U} \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

где $\mathbf{X} = \left[U_{C2}(t); U_{C1}(t); \Phi_{\text{ГУН}}(t);\right]$ – вектор состояния системы ИФАПЧ;

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \dfrac{-1}{R_1} \| R_2(t) C_2 & \dfrac{1}{R_1} \| R_2(t) C_2 & \dfrac{-i_M K_2(t)}{(2\pi N(t)) C_2} \\ \dfrac{1}{R_1} \| R_2(t) C_1 & \dfrac{-1}{R_1} \| R_2(t) C_1 & \dfrac{-i_M K_2(t)}{(2\pi N(t)) C_1} \\ 0 & 2\pi \cdot S_{\text{ГУН}} & 0 \end{bmatrix} -$$

матрица системы ИФАПЧ, в которой
$R_1 \| R_2(t) = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$, $N(t) = N_1$
для $t < t_k - t_3$ и $N(t) = N_2$ для $t > t_k - t_3$.

$\mathbf{B} = [0; 0; 2\pi \cdot S_{\text{ГУН}};]$; $\mathbf{U} = U(t)$; $\mathbf{Y} = \omega_{\text{ГУН}}(t)$;
$\mathbf{C} = [0; 2\pi \cdot S_{\text{ГУН}}; 0;]$; $\mathbf{D} = 2\pi \cdot S_{\text{ГУН}}$.

Отметим, что матрицы **A**, **B**, **C** записаны в соответствии с правилами оформления матриц в системе математических расчётов MatLab.

При решении дифференциального уравнения (5) воспользуемся преобразованием eig из MatLab [10] для формирования модальной канонической SS-модели:

$$[\mathbf{P}, \mathbf{A}_{\text{Д}}] = \text{eig}(\mathbf{A}),$$

где $\mathbf{A}_{\text{Д}}$ – диагональная матрица, содержащая на главной диагонали собственные числа матрицы **A**, а **P** – матрица правых собственных векторов **A**.

Используем матрицу **P** для преобразования вектора состояний **X** к вектору $\mathbf{X}_{\text{C}}$. Новый вектор состояния $\mathbf{X}_{\text{C}}$ связан с исходным вектором соотношением $\mathbf{X}_{\text{C}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}$, и система дифференциальных уравнений (5) преобразуется к виду

$$\left.\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}}_{\text{C}} &= \mathbf{A}_{\text{Д}} \cdot \mathbf{X}_{\text{C}} + \mathbf{B}_{\text{Д}} \cdot U \\ \mathbf{Y} &= \mathbf{C}_{\text{Д}} \cdot \mathbf{X}_{\text{C}} + \mathbf{D} \cdot U \end{aligned}\right\} \qquad ,(6)$$

где $\mathbf{P}^{-1}$ – обратная матрица к **P**, $\mathbf{A}_{\text{Д}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$, $\mathbf{B}_{\text{Д}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}$, $\mathbf{C}_{\text{Д}} = \mathbf{C}\mathbf{P}$.

Так как на интервале движения $0 < t < t_k - t_3$ и $t > t_k - t_3$, мы имеем две матрицы **A**–$\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$, то, соответственно, имеем две матрицы преобразований $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ и пары матриц $\mathbf{B}_{\text{Д1}}$, $\mathbf{B}_{\text{Д2}}$ и $\mathbf{C}_{\text{Д1}}$, $\mathbf{C}_{\text{Д2}}$.

Известно из [11], что решение системы уравнений (6) для $U(t) = \text{const} = U$ можно записать как

$$\mathbf{X}_{\text{C}}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{X}_{\text{C}}(0) + \mathbf{A}_{\text{Д}}^{-1}[\mathbf{\Phi}(t) - \mathbf{E}]\mathbf{B}_{\text{Д}} U, \quad (7)$$

где $\mathbf{\Phi}(t) = diag[\exp(\alpha_1 t), \exp(\alpha_2 t), \exp(\alpha_3 t)]$ – переходная диагональная матрица, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ –

собственные значения матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{X}_C(0)$ – значение вектора состояния при t=0, $\mathbf{A}_Д^{-1}$ – обратная матрица $\mathbf{A}_Д$, $\mathbf{A}_Д^{-1} = \mathrm{diag}[1/\alpha_1,\ 1/\alpha_2,\ 1/\alpha_3]$, $\mathbf{E}$ – единичная диагональная матрица, $U = U_{М1}$ на интервале времени $t = 0 \div t_k - t_3$ и $U = U_{М1} + U_П$ на интервале времени $t = t_k - t_3 \div t_у - t_3$.

Используя допущение (3), из формул (6) и (7) получим в случае действительного максимального собственного значения $\alpha_{1М}$ из значений $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31}$ в интервале $t = 0 \div t_k - t_3$ следующее выражение

$$\Delta f_{ГУН}(t) \approx S_{ГУН} \cdot U_{М1} \cdot b_1 \cdot e^{\alpha_{1М} t} = \\ = \frac{c_{1М} \cdot b_{1М}}{\alpha_{1М}} \cdot e^{\alpha_{1М} t} \cdot U_{М1}, \qquad (8)$$

где $c_{1М}, b_{1М}$ – элементы матриц $\mathbf{C}_{Д1}$ и $\mathbf{B}_{Д1}$, соответствующие $\alpha_{1М}$.

Из выражения (8) получим

$$b_1 = \frac{c_{1М} \cdot b_{1М}}{\alpha_{1М} \cdot S_{ГУН}}.$$

Для комплексных собственных значений $\alpha_{1М} = \mathrm{Re}(\alpha_{1М}) + i \cdot \mathrm{Im}(\alpha_{1М})$, имеющих максимальную действительную часть $\mathrm{Re}(\alpha_{1М})$, можно найти асимптоту в виде

$$\Delta f_{ГУН}(t) \approx S_{ГУН} \cdot U_{М1} \cdot |b_1| \cdot e^{\mathrm{Re}(\alpha_{1М}) t},$$

где $$|b_1| = \left| 2 \cdot \frac{c_{1М} \cdot b_{1М}}{\alpha_{1М} S_{ГУН}} \right|.$$

Таким образом, определены асимптотические коэффициенты $b_1, \alpha_{1М}$ для расчётов времени ПП по отклонению частоты ГУН от номинала для интервала $t = 0 \div t_k - t_3$.

На интервале движения $t = t_k - t_3 \div t_у - t_3$ выражение (7) запишется как

$$\mathbf{X}_{C2}(t) = \mathbf{\Phi}_2(t)\mathbf{X}_{C2}(t_k - t_3) + \\ + \mathbf{A}_{Д2}^{-1}[\mathbf{\Phi}_2(t) - \mathbf{E}]\mathbf{B}_{Д2}(U_{М1} + U_П), \qquad (10)$$

где $\mathbf{\Phi}_2(t) = diag[\exp(\alpha_{21}t),\ \exp(\alpha_{22}t),\ \exp(\alpha_{23}t)]$,

$$\mathbf{X}_{C2}(t_k - t_3) = \mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1\mathbf{X}_{C1}(t_k - t_3) = \\ = \mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1\mathbf{A}_{Д1}^{-1}[\mathbf{\Phi}_1(t_k - t_3) - \mathbf{E}]\mathbf{B}_{Д1}U_{М1},$$

а отклонение частоты ГУН от номинального значения в виде

$$\Delta f_{ГУН2}(t) = \\ = \mathbf{C}_{Д2}(t)\mathbf{\Phi}_2(t)\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1\,\mathbf{A}_{Д2}^{-1}[\mathbf{\Phi}_1(t_k - t_3) - \mathbf{E}]\mathbf{B}_{Д1}U_{М1} + \\ \mathbf{C}_{Д2}\mathbf{A}_{Д2}^{-1}\mathbf{\Phi}_2(t)\mathbf{B}_{Д2}(U_{М1} + U_П). \qquad (11)$$

Полагая в выражении (11) $t = t_у$, $\Delta f_{ГУН2} = \Delta f_\varepsilon$ и используя допущение (3), получим для $\alpha_{2М}$ – действительного максимального собственного значения $A_{Д2}$:

$$\Delta f_\varepsilon = C_{Д2М}[X_{C2М}(t_k - t_3) + , \\ + B_{Д2М}(U_{М1} + U_П)/\alpha_{2М}] \cdot \exp[\alpha_{2М}(t_у - t_k)] \qquad (12а)$$

где $C_{Д2М}, X_{C2М}, B_{Д2М}$ – элемент строки $\mathbf{C}_{Д2}$ и элементы векторов $\mathbf{X}_{C2}, \mathbf{B}_{Д2}$ – соответствующие $\alpha_{2М}$. Для комплексного собственного значения $A_{Д2}$, имеющего максимальную действительную часть $\mathrm{Re}(\alpha_{2М})$, запишем

$$\Delta f_\varepsilon = 2\Big| C_{Д2М}[X_{C2М}(t_k - t_3) + \\ \Big| + B_{Д2М}(U_{М1} + U_П)/\alpha_{2M}] \Big| \times \\ \times \exp[\mathrm{Re}(\alpha_{2М})(t_у - t_k)]. \qquad (12б)$$

Из (12а) и (12б) найдём время ПП $t_у$ для действительного значения $\alpha_{2М}$:

$$t_у = t_k + \frac{1}{\alpha_{2М}} \times \\ \times \ln \frac{\Delta f_\varepsilon}{C_{Д2М}\left[X_{C2М}(t_k - t_3) + \dfrac{B_{Д2М}(U_{М1} + U_П)}{\alpha_{2М}} \right]}. \qquad (13а)$$

Для комплексного значения $\alpha_{2М}$

$$t_у = t_k + \frac{1}{\mathrm{Re}(\alpha_{2М})} \times \\ \times \ln \frac{\Delta f_\varepsilon / 2}{\left| C_{Д2М}\left[X_{C2М}(t_k - t_3) + \dfrac{B_{Д2М}(U_{М1} + U_П)}{\alpha_{2М}} \right] \right|} \qquad (13б)$$

Анализ (13а) и (13б) показывает, что при заданных параметрах системы ИФАПЧ и уровне помехи $U_{\text{п}}$ существует оптимальное значение $t_{k0} = t_k - t_{\text{З}}$, при котором достигается минимальное время $t_{\text{у}}$. Для действительных значений $\alpha_{1\text{М}}$ и $\alpha_{2\text{М}}$ функция $t_{\text{у}}$ является унимодальной, и величину t_{k0} можно определить из (13а) в виде

$$t_{k0} = \ln\left[\frac{\alpha_{1\text{М}}\alpha_{2\text{М}}\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1(\alpha_{2\text{М}})\mathbf{A}_{\text{Д1}}^{-1}\mathbf{B}_{\text{Д1}}}{\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1(\alpha_{2\text{М}},\alpha_{1\text{М}})(\alpha_{2\text{М}}-\alpha_{1\text{М}})B_{\text{Д1М}}} - \frac{\alpha_{1\text{М}}B_{\text{Д2}}\left(\frac{U_{\text{П}}}{U_{\text{М1}}}+1\right)}{\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1(\alpha_{2\text{М}},\alpha_{1\text{М}})(\alpha_{2\text{М}}-\alpha_{1\text{М}})B_{\text{Д1М}}}\right]\frac{1}{\alpha_{1\text{М}}}, \quad (14)$$

где $\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1(\alpha_{2\text{М}})$ – строка матрицы $\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1$, соответствующая номеру $\alpha_{2\text{М}}$, $\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1(\alpha_{2\text{М}},\alpha_{1\text{М}})$ – элемент матрицы $\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1$, соответствующий номерам $\alpha_{1\text{М}}$ и $\alpha_{2\text{М}}$.

Для комплексных значений $\alpha_{1\text{М}}$ и $\alpha_{2\text{М}}$ функция $t_{\text{у}}$ не является унимодальной, её вид для некоторых параметров ИФАПЧ показан на рис.6 (кривая 1). По этой кривой можно определить глобальный минимум $t_{\text{у}}$ и использовать его при определении времени коммутации t_{k0} параметров ИФАПЧ. Однако ввиду приближенности исследуемой модели более целесообразно в этом случае аппроксимировать $t_{\text{у}}$ полиномом, имеющим один минимум. Так, на рис.6 показана аппроксимирующая кривая 2, полученная с использованием функции polyfit из MatLab – это полином 10-го порядка, имеющий один минимум $t_{\text{у0}}$ при t_{k0}.

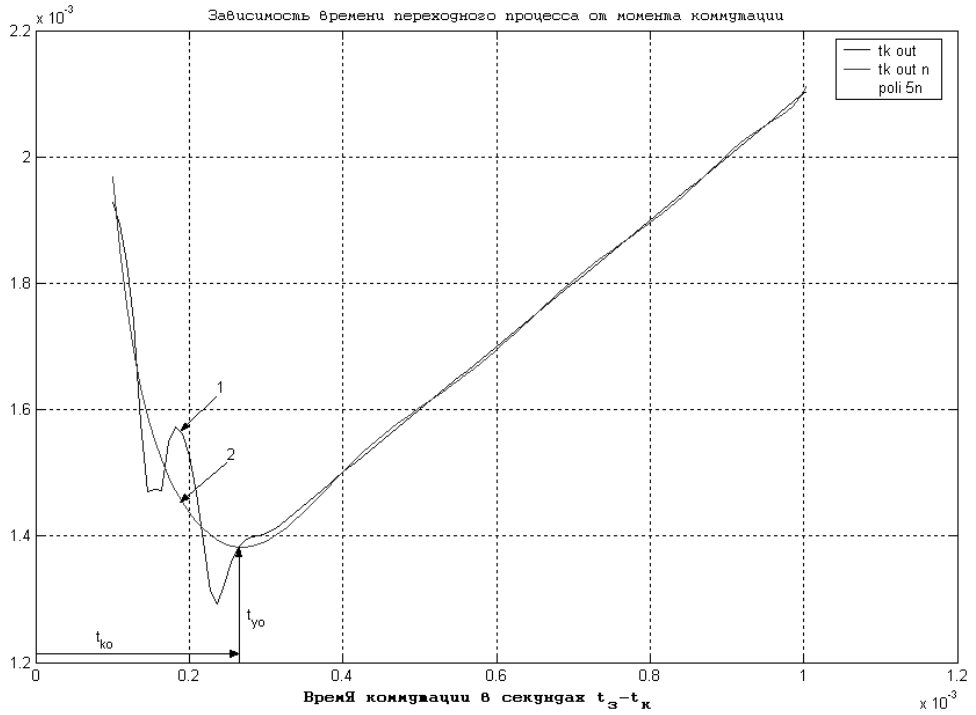


Рис.6. Зависимость длительности ПП от времени коммутации

Таким образом, оптимальное время ПП $t_{\text{у0}}$ в системе ИФАПЧ с коммутацией параметров можно определить из (13), в котором $t_{k0} = t_k - t_{\text{З}}$.

Следует отметить, что выражения (13) и (14) справедливы для применения способов БЗ и ДЗН, когда $|\alpha_{1\text{М}}| > |\alpha_{2\text{М}}|$ и нельзя использовать для способа УРС, когда $|\alpha_{1\text{М}}| = |\alpha_{2\text{М}}|$.

Отметим, что при способе УРС $N_1 = SCR \cdot N_2$, $K_1(0) = K_1(t_k) \cdot SCR$, $K_2 = 0$, где SCR – коэффициент, увеличивающий N_2 и K_1 на интервале вре-

мени $t = 0 \div t_k$. С использованием соотношения (2) коэффициент *CSR* можно определить как

$$CSR = \frac{\varphi_{\text{М}} \cdot S_{\text{ГУН}} \cdot U_{\text{М}}}{N_2 \cdot \omega_{\text{Б2}}}. \qquad (15)$$

В выражении (15) $\varphi_{\text{М}} = \left|\Phi_{\text{ГУН}_{\text{М}}}\right| \times$ $\times \frac{\omega_{\text{Б2}}}{S_{\text{ГУН}} U_{\text{М}} 2\pi}$, где $\Phi_{\text{ГУН}_{\text{М}}}$ – максимальное отклонение координаты $\Phi_{\text{ГУН}}(t)$ от 0 при решении уравнения (5).

Для уменьшения времени ПП при осуществлении способа УРС необходимо выбирать момент t_k таким образом, чтобы при $t > t_k$ не возникал вновь РС и помеха коммутации была бы минимизирована по отношению к уровню отклонения частоты ГУН от номинала. Используя выражение (1), найдём асимптотическое отклонение фазы ГУН:

$$\Phi_{\text{ГУН}}(t) = \frac{2\pi \cdot S_{\text{ГУН}} \cdot U_{\text{М}} \cdot b_1}{\alpha_{1\text{М}}} \cdot \exp(\alpha_{1\text{М}} t). \qquad (17)$$

Будем считать, что $\left|\Phi_N(t_k)\right| \le 2\pi$. Из этого соотношения и (17) получим

$$\left|\frac{2\pi \cdot S_{\text{ГУН}} \cdot U_{\text{М}} \cdot b_1}{\alpha_{1\text{М}} \cdot N_2} \cdot \exp(\alpha_{1\text{М}} t_k)\right| \le 2\pi.$$

Следовательно, момент коммутации t_k определится как

$$t_k \ge \ln\left|\frac{\alpha_{1\text{М}} \cdot N_2}{S_{\text{ГУН}} \cdot U_{\text{М}} \cdot b_1}\right| \frac{1}{\alpha_{1\text{М}}}. \qquad (18)$$

Подставив выражение (18) в выражение (1), найдём отклонение частоты в момент коммутации:

$$\Delta f(t_k) = \left|\alpha_{1\text{М}} \cdot N_2\right|. \qquad (19)$$

В реальных устройствах $\Delta f(t_k) \gg \Delta f_{\text{П}}$, поэтому влияние $\Delta f_{\text{П}}$ на длительность ПП в СЧ-ИФАПЧ со способом УРС можно не учитывать и $t_{\text{у}CSR}$ можно определить из выражения (1) как

$$t_{\text{у}CSR} = \ln\left(\frac{\Delta f_\varepsilon}{S_{\text{ГУН}} \cdot U_{\text{М}}} \cdot \frac{1}{b_1}\right) \cdot \frac{1}{\alpha_{1\text{М}}}. \qquad (20)$$

Используя полученные соотношения, найдём выигрыш от применения коммутационных способов ускорения протекания ПП перестройки СЧ-ИФАПЧ по частоте. Будем определять выигрыш как отношение времени ПП без коммутации ко времени ПП $t_{\text{у}}$ с коммутацией и оптимизацией t_{k0}. При использовании способа УРС

$$B_{CSR} = t_{\text{у}2} / t_{\text{у}CSR}, \qquad (21)$$

а при реализации способов БЗ и ДЗН

$$B_{FS} = t_{\text{у}2} / t_{\text{у}0}. \qquad (22)$$

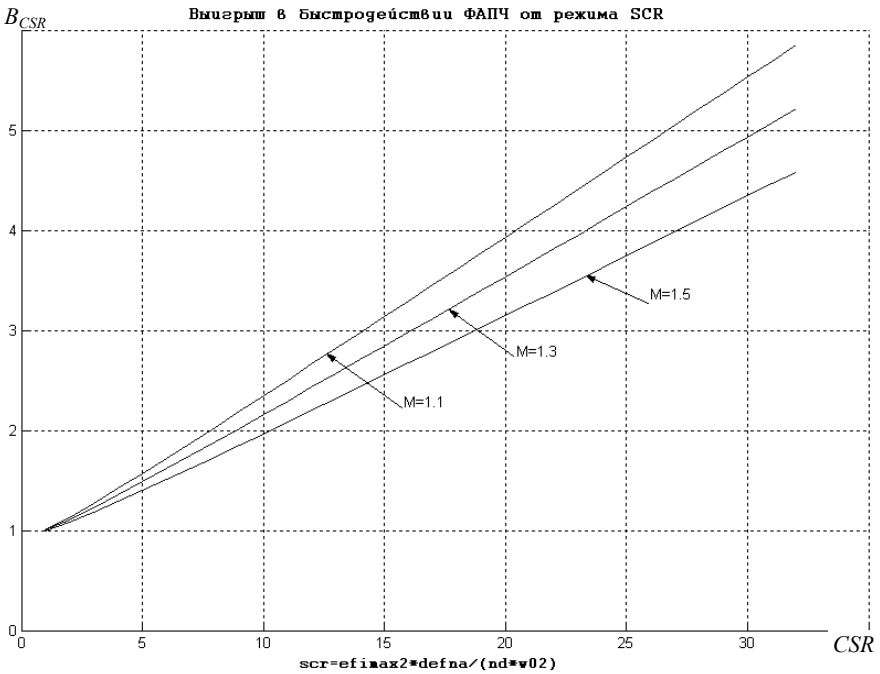


Рис.7. Уменьшение времени ПП за счёт способа УРС

На рис.7 приведены результаты расчётов по формуле (21) выигрыша в быстродействии ИФАПЧ от использования способа УРС для случая $\Delta f_{\varepsilon} / \Delta f_{\text{ГУН}} = 1\text{Гц} / 450\text{МГц}$ и синтеза параметров ИФАПЧ для трёх значений показателя колебательности M=1,1, M=1,3 и M=1,5. Очевидно, что с увеличением *CSR* и уменьшением M выигрыш увеличивается. Отметим, что в СЧ-ИФАПЧ ADF4156, LMX2470 и LMX2485 имеются 4 градации значения *CSR* – 1, 2, 4 и 16. Следовательно, используя способ УРС в этих СЧ, можно получить выигрыш по быстродействию от 2,5 до 3 раз.

На рис.8 показаны результаты расчета выигрыша в быстродействии СЧ-ИФАПЧ по формуле (22) для случаев применения способов БЗ и ДЗН. Параметры СЧ-ИФАПЧ выбирались такими же, как и при расчётах, результаты которых приведены на рис.4 и 5, но дополнительно задавался уровень помехи коммутации $\Delta f_{\text{П}} = 10000\text{Гц}$.

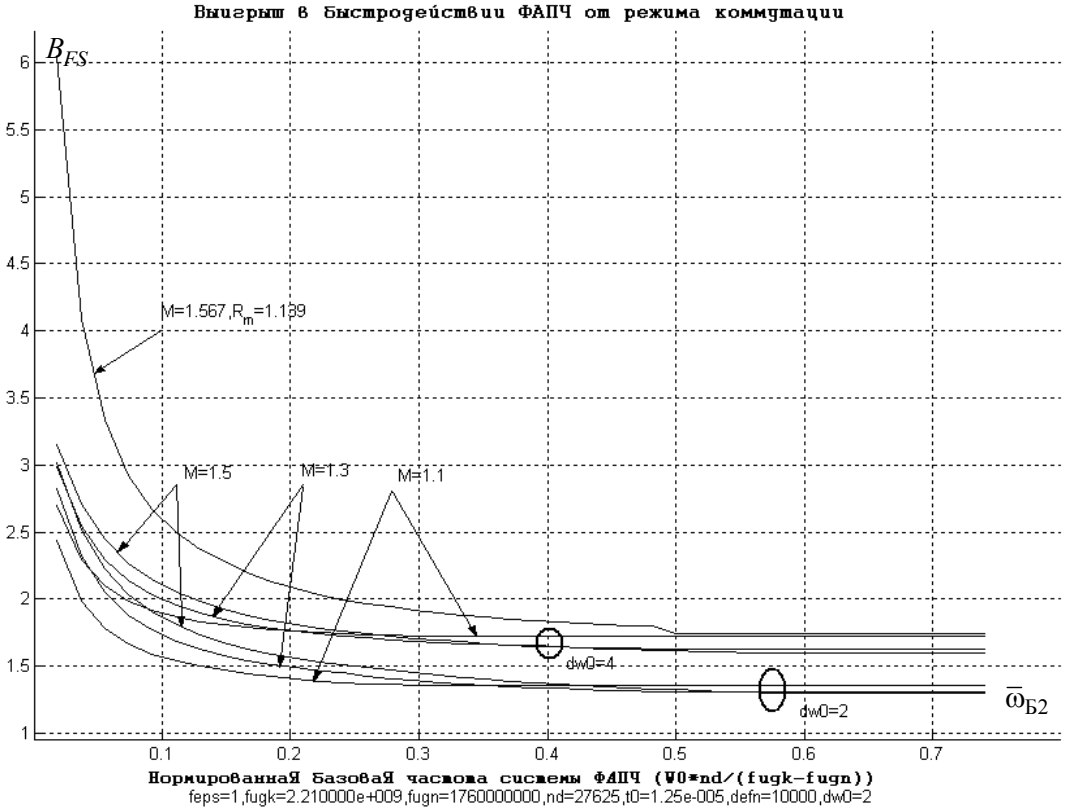


Рис.8. Зависимости выигрыша для БЗ и ДЗН способов ускорения ПП

На рис.8 приведены три группы кривых: 1 группа – расчёт выигрыша при коммутации полосы $\omega_{\text{Б}}$ в 2 раза, т. е. при $dw0 = \omega_{\text{Б1}} / \omega_{\text{Б2}} = 2$ для трёх значений M=1,1, M=1,3 и M=1,5; 2 группа – расчёт при $dw0 = 4$ для трёх значений M=1,1, M=1,3 и M=1,5; 3 группа – расчёт выигрыша с использованием способа ДЗН. Для способа ДЗН параметры СЧ-ИФАПЧ синтезируются с применением методики, предложенной в [6] для варианта применения микросхем SA8016/8028/8026, когда $K_1(t) = 5 \cdot 1(t) - 4 \cdot 1(t - t_k)$ и $K_2(t) = 12 \cdot 1(t) - 12 \cdot 1(t - t_k)$ (для интервала $t < t_k$ параметры синтезируются при значении показателя колебательности R_{M}=1,139, а для интервала $t > t_k$ – при значении показателя колебательности M=1,567).

Из анализа кривых на рис.8 следует, что наибольший выигрыш от 2,5 до 6 раз достигается при значениях $\bar{\omega}_{\text{Б2}} < 0,02$, то есть когда наиболее длителен интервал времени режима скольжения t_3. При малых значениях $\bar{\omega}_{\text{Б2}}$ можно рекомендовать использование способа ДЗН, обеспечивающего максимальный выигрыш по ускорению ПП.

В заключение отметим, что предложенная приближенная методика определения длительности ПП в СЧ-ИФАПЧ для РС и коммутационными способами повышения быстродействия при перестройке по частоте с учётом возникающих

при этом помех коммутации проверена на модели, разработанной в среде визуального моделирования SIMULINK системы математических расчётов MatLab. Эта модель соответствует обобщенной схеме СЧ-ИФАПЧ на рис.1 для различных способов ускорения ПП. Сравнение результатов расчётов длительностей ПП по этой модели и приближенной методике показало достаточную для инженерной практики точность ~5–10%.

Заметим также, что эта методика использовалась авторами при применении в составе СЧ-ИФАПЧ в цепи управления ФНЧ не только второго, но и более высоких порядков и имеющего передаточную функцию

$$G_{\text{ФНЧ}}(s) = \frac{e_{\Phi}(s)}{\Delta\Phi(s)} = \frac{K(T_1 s + 1)}{s\sum_{i=2}^{n}(T_i s + 1)},$$

где K и T_i – параметры фильтра, которые скачкообразно изменяются в момент времени коммутации t_k.

Литература

1. *Гордонов А.Н.* Астатическая система ИФАПЧ, оптимизированная по длительности подстройки / А.Н. Гордонов, И.В. Резвая // Радиотехника. – 1992. – № 4. – С. 48–52.

2. ADF4156 6GHz Fractional-N Frequency Synthesizers. Analog Devices Incorporated. Data Sheet. – 2005.

3. LMX2470 2.6GHz Delta-Sigma Fractional-N PLL with 800MHz Integer-N PLL. National Semiconductor Corporation. Data Sheet. – 2003.

4. ADF4154 Fractional-N Frequency Synthesizers. Analog Devices Incorporated. Data Sheet. – 2004.

5. LMX2306/ LMX2316/ LMX2326 PLLatinum Low Power Frequency Synthesizer for RF Personal Communication. National Semiconductor Corporation. Data Sheet. – 2004.

6. SA8028 2.5 GHz sigma delta fractional-N / 760 MHz IF integer frequency synthesizers. Philips Semiconductors. Data Sheet. – 2002.

7. NJ88C50 Dual Low Power Frequency Synthesizer. Mitel Semiconductor. Data Sheet. – 1995.

8. *Романов С.К.* Коммутация полосы пропускания в синтезаторах частот со счётчиковыми делителями в цепи обратной связи / С.К. Романов, Д.Н. Рахманин // Теория и техника радиосвязи: научн.-техн. сб. / ВНИИС. – Воронеж, 2002. – Вып. 2. – С. 118–128.

9. *Левин В.А.* Синтезаторы частот с системой импульсно-фазовой автоподстройки частоты / В.А. Левин, В.Н. Малиновский, С.К. Романов. – М. : Радио и связь, 1989. – 232с.

10. *Кетков Ю.Л.* MatLab 7: программирование, численные методы / Ю.Л. Кетков, А.Ю. Кетков, М.М. Шульц. – СПб. : БХВ-Петербург, 2005. – 752 с.

11. *Директор С.* Введение в теорию систем / С. Директор, Р. Рорер. – М. : Мир, 1974. – 464 с.

12. *Романов С.К.* Использование пропорционально-интегрального регулирования в синтезаторах частот с фазовой автоподстройкой / С.К. Романов, М.Н. Тихомиров, Н.М. Тихомиров // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. – 2005. – №1 (58). – С. 73–82.

Получено 10.05.07 г.

УДК 681.3

ОПЕРАТИВНАЯ ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ЗОН ВЛИЯНИЯ РЭС

Е.А. ХРОМЫХ, А.А. ЧАПЛЫГИН, С.Н. ШУЛЬЖЕНКО, В.Ф. БЛИНОВ

Для более оперативного и наглядного решения задач ЭМС или радиоподавления (РП) предлагается новая методика оценки мощности электромагнитного поля, создаваемого радиоэлектронным средством (РЭС), в точке приёма. Методика основана на применении средств текстового редактора; таким образом, для её реализации необходим РС с текстовым редактором (например, Word 2001) и база данных с зависимостями затухания сигнала на различных трассах.

Радиоэлектронные средства в процессе своей работы оказывают умышленное или неумышленное влияние на другие РЭС. Область, в пределах которой мощность сигнала, излучаемого РЭС, не превышает заданный уровень, определим как зону влияния РЭС [1]. Среди параметров, определяющих размер и форму зоны влияния, выделим частотный диапазон, мощность передатчика, условия затухания сигнала на радиотрассе, диаграммы направленности используемых антенн (ДН).

Определим энергопотенциал (ЭП) РЭС как мощность его передатчика ($P_{\text{прд}}$) в заданной полосе рабочих частот (ΔF). Для РЭС, имеющих антенны с круговыми (класс укороченных вибраторов) диаграммами направленности, абсолютное значение ЭП убывает с увеличением расстояния между РЭС и точкой приёма одинаково для всех азимутов. Таким образом, мощность сигнала от данного РЭС в точке приёма, находящейся в зоне влияния, зависит от его ЭП, расстояния (L) между РЭС и приёмником и характеристиками затухания сигнала на трассе ($P(R)$).

Затухание сигнала на трассе удобно оценивать в [дБ] по отношению к начальному значению ЭП. Тогда для L=0, ЭП=0 [дБ], а, например, для L=1км, ЭП=–20дБ и все зависимости затухания сигнала на трассе будут иметь вид убывающих от 0 в область отрицательных значений кривых.

На рис.1 приведены схемы ЭП двух РЭС, расположенных на поверхности Земли на расстоянии L друг от друга. Они характеризуются своими ЭП P_1 и P_2, а также законами затухания сигнала на трассе, характеризуемыми кривыми $P_1(R)$ и $P_2(R)$.

В точке пересечения кривых (Прм) абсолютные значения ЭП разных РЭС равны друг другу и имеют значение, равное «Порогу». Кроме этого, точка «Прм» определяет расстояния R_1 и R_2, на которых это равенство выполняется. На рис.1 изображены одинаковые ЭП (все характеристики РЭС одинаковые и условия затухания сигналов также одинаковые), поэтому R_1=R_2=L/2.

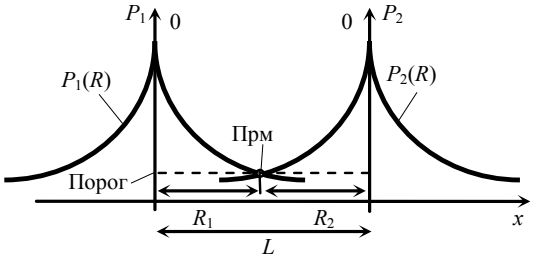


Рис.1. Энергопотенциалы двух одинаковых по параметрам РЭС

Если ЭП какой-либо РЭС уменьшится на N дБ, то это приведёт к изменению соотношения между R_1 и R_2, так как весь график ЭП соответствующего РЭС сместится вниз по оси P на N дБ. На рис.2 в качестве примера приведена схема, где P_1=P_2–N, при этом $P_1(R)$=$P_2(R)$, то есть условия распространения сохранились одинаковыми.

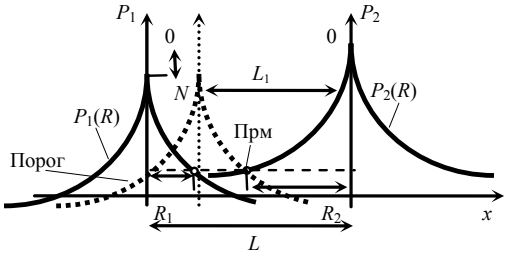


Рис.2. ЭП РЭС1 меньше ЭП РЭС2

Из рис.2 следует, что при сохранении «порога» и L неизменным; R_1< R_2 и в точке Прм абсолютное значение ЭП1 на N дБ меньше абсолютного значения ЭП2. Для того, чтобы в точке Прм абсолютные значения ЭП разных РЭС стали равными, необходимо передвинуть РЭС1 вдоль ко-

ординаты x на расстояние L_1 (новое положение ЭП1 выделено пунктирной линией).

Если изменятся условия затухания сигнала для какой-либо РЭС, то это также приведёт к изменению соотношения между R_1 и R_2 в точке приёма Прм. На рис.3 в качестве примера приведена схема, где P_1=P_2, но при этом затухание сигнала для РЭС1 больше, чем для РЭС2. Кривая $P_1(R)$, описывающая затухание сигнала, более крутая и не совпадает с кривой $P_2(R)$.

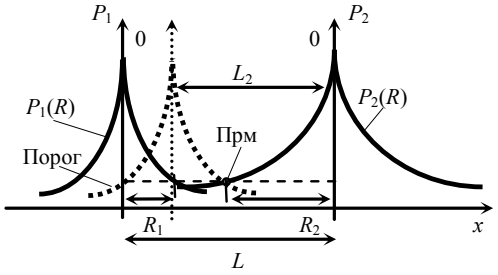


Рис.3. Затухание сигнала РЭС1 сильнее, чем у РЭС2

Из рис.3 следует, что при сохранении «порога» и L неизменным величина R_1<R_2. В точке Прм абсолютное значение ЭП1 меньше абсолютного значения ЭП2. Для того, чтобы в точке Прм абсолютные значения ЭП разных РЭС стали равными, необходимо передвинуть РЭС1 вдоль координаты x на расстояние L_2 (новое положение ЭП1 выделено пунктирной линией).

Процедуру перемещения графиков относительно друг друга легко осуществлять с помощью любого текстового редактора, имеющегося на PC. Особенности применения текстового редактора для оперативной оценки параметров зон влияния рассмотрим на конкретном примере.

Необходимо определить дистанцию подавления ($L_{под}$) линии радиосвязи (рабочая частота 80 МГц, полоса 25 КГц, мощность передатчика $P_{св}$=50 Вт, дистанция связи $L_{св}$=(5,10,15 и 20) км).

Постановщик помех (ПП) имеет интегральную мощность излучения ($P_{пом}$) 10 или 50 Вт в полосе частот от 30 до 120 МГц. ПП может находиться на высоте (H) от 2 до 3000 метров.

В точке приёма уровень спектральной мощности, создаваемой ПП, должен превышать уровень спектральной мощности, создаваемой Прд, в два раза (на 3 дБ). На рис.4 представлена схема расположения ПП, Прм и Прд.

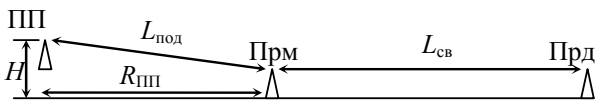
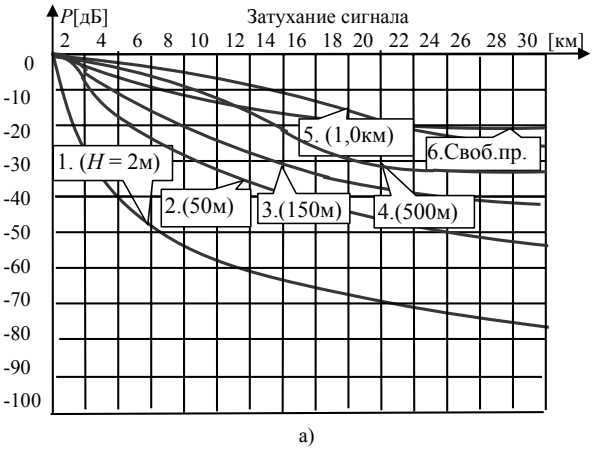


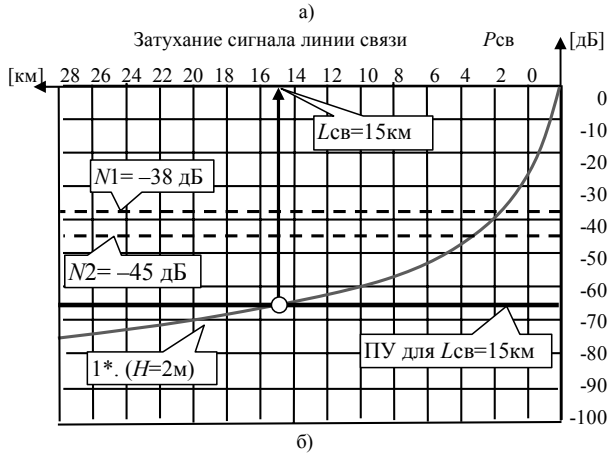
Рис.4. Схема расположения ПП, Прм и Прд

Характеристики затухания сигнала на радиолинии определим по результатам экспериментальных исследований, проведённых на приземных и наклонных радиотрассах [2]. На рис.5а приведены кривые затухания сигнала на частоте 60 МГц для наземной трассы (кривая 1) и наклонных трасс при высотах подъёма передатчика на 50 м (2), 150м (3), 500м (4), 1000м (5) и для свободного пространства (6). По оси x отложено расстояние от излучателя (км), а по оси y – затухание в (дБ), и отсчёт ведётся от 0 дБ.

Для дальнейших расчетов интегральную мощность передатчика ПП (10Вт и 50Вт) необходимо «привести» к спектральной мощности $P_{св}$ и использовать её в качестве приведённой мощности передатчика ПП ($P_{пом\ пр}$). Спектральная мощность передатчика линии связи равна 50Вт/25КГц=2000[Вт/МГц]. Для полосы ПП в 90МГц (120-30) спектральная мощность ПП (при исходной 50Вт) равна 50/90=0,55[Вт/МГц], а при исходной 10Вт – 0.11[Вт/МГц]. Таким образом, приведённая ($P_{пом\ пр}$) спектральная мощность ПП (при исходной 50 и 10 Вт) соответственно на (–)35,5 и (–)42,5дБ меньше спектральной мощности связного Прд.



а)



б)

Рис.5 а – кривые затухания, б – форматирование ЭП Прд линии связи

Для расчёта дистанции подавления предлагается следующая методика, позволяющая оценивать дистанцию подавления в текстовом редакторе.

1. На рис.5а выделяется кривая затухания для приземной трассы (кривая 1).

2. Для её копии строится зеркальное ото-

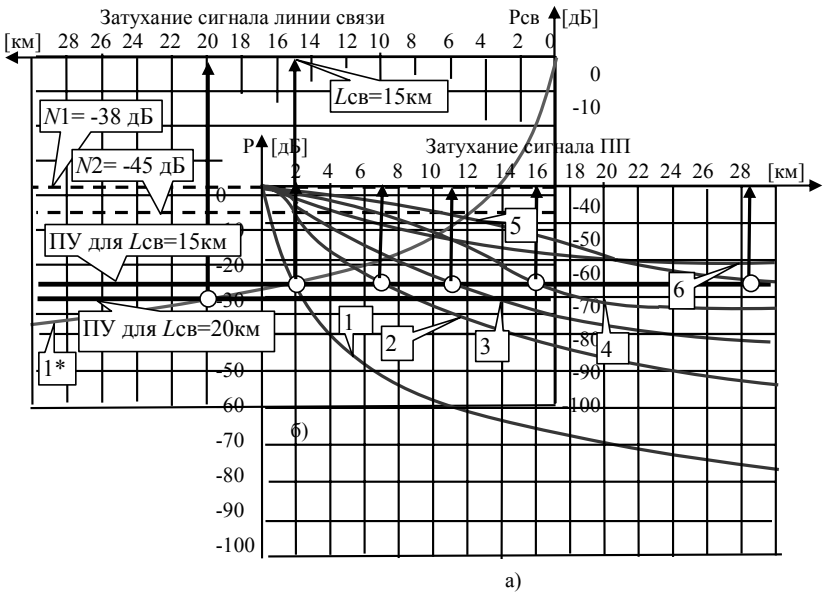


Рис.6. Оценка дистанций подавления при $L_{св}$=15км и $N1$= –38дБ

бражение (кривая 1^* рис.5б и на график наносят линии пороговых уровней (ПУ) для соответствующих $L_{св}$ (на рис.5б нанесен ПУ для $L_{св}$=15км).

3. Рассчитываются уровни приведённой мощности ($P_{пом\ пр}$) передатчика ПП (для 50Вт $P_{пом\ пр}$ =–35 дБ, а 10Вт $P_{пом\ пр}$ = –42дБ).

4. На рис.5б наносятся уровни N=(0дБ–|$P_{пом\ пр}$ [дБ]+$К_{под}$[дБ]|). Для $К_{под}$=3дБ эти уровни равны соответственно: $N1$=–38дБ и $N2$=–45 дБ.

5. Рис.5а с помощью «мыши» перетаскивается на рис.5б и своим верхним краем устанавливается по одному из уровней N (рис.6). При дальнейших измерениях рис.5а будет перемещаться вдоль выбранного уровня N.

6. Процедура оценки дистанции подавления сводится к перемещению рис.5а в рабочей области рис.5б) так, чтобы при перемещении вдоль уровня N кривая 1 пересекла кривую 1^*. Через точку пересечения кривых проводят две линии – вертикальную и горизонтальную.

7. Вертикальная, спроецированная на ось $L_{св}$, определяет величину $L_{св}$, а её пересечение с осью «затухание сигнала ПП», определяет $L_{под}$ для приземной трассы.

8. Горизонтальная линия (ПУ) пересекает кривые затухания для наклонных радиотрасс. Точки пересечения (выделены белыми кружками) определяют величины $L_{под}$ для данной кривой затухания.

На рис.6 график затухания сигнала для ПП с интегральной мощностью 50вт смещён вниз по оси P на –38 дБ. Точка пересечения кривой 1 с кривой 1* определяет расстояние $L_{св}$=15км, а $L_{под}(1)$=2км. Для других кривых расстояния соответственно равны: $L_{под}(2)$=6,8 км, $L_{под}(3)$=10,8 км, $L_{под}(4)$=16км, $L_{под}(5)$=28,2км. Величина $R_{ПП}$ определяется как $(L_{под}^2 - H^2)^{0,5}$. Эти результаты хорошо совпадают с результатами натурных экспериментов.

Достоинством методики является простота оценки $L_{под}$ и $L_{св}$ при изменении параметров ЭП. Для ПП с интегральной мощностью 50Вт перемещение графика а) вдоль порогового уровня $N1$=–38дБ изменяет координаты точки пересечения кривых 1 и 1*, а вместе с этим и размеры $L_{св}$ и $L_{под}$ для всех кривых. Для ПП с интегральной мощностью 10Вт график 5а смещается вниз по оси P на уровень $N2$=–45дБ и процедура оценки размеров $L_{св}$ и $L_{под}$ повторяется вновь.

Литература

1. ГОСТ 23611–79.

2. *Долуханов М.П.* Распространение радиоволн / М.П. Долуханов. – М. : Связь, 1972. – 335с.

Получено 19.09.06г.

УДК 621.396.662

ВЛИЯНИЕ НЕЛИНЕЙНОСТИ ИМПУЛЬСНО-ФАЗОВОГО ДЕТЕКТОРА НА СПЕКТР ПОМЕХ В СИСТЕМЕ ИФАПЧ С ДРОБНЫМ ДЕЛИТЕЛЕМ ЧАСТОТЫ

С.К. РОМАНОВ, И.А. МАРКОВ

Получена математическая модель системы ИФАПЧ с дробными делителями частоты, использующими дельта-сигма модуляцию, и импульсно-фазовым детектором с неидентичными токами накачки. На основе полученной модели разработана программа для расчета уровня помех дробности.

В синтезаторах частот (СЧ), построенных на основе импульсно-фазовой автоподстройки частоты (ИФАПЧ), нашли широкое применение дробные делители частоты с переменным коэффициентом деления (ДДПКД). О преимуществах таких СЧ известно [1,2].

Однако наличие ДДПКД в ИФАПЧ приводит к появлению в выходном сигнале СЧ помех дробности (ПД). Для уменьшения уровня ПД в низкочастотной части спектра сигнала СЧ в составе ДДПКД используется схема дельта-сигма модулятора (ДСМ) в разных модификациях. Расчеты ПД в ИФАПЧ с ДДПКД и ДСМ по линейной модели [3] показывают высокую эффективность применения ДСМ. Однако система ИФАПЧ имеет ряд нелинейностей, которые ухудшают ослабление спектральных составляющих ПД в полосе пропускания системы ИФАПЧ. Это такие нелинейности, как:

1) пороговый характер работы ДДПКД [4],

2) при использовании 3-х уровневого импульсного частотно-фазового детектора (ИЧФД) в составе ИФАПЧ – неравенство токов «накачки».

Влияние первой нелинейности на уровень ПД в составе выходного сигнала СЧ рассмотрено в [5]. О влиянии второй нелинейности на увеличение ПД в полосе пропускания ИФАПЧ указано в работах [6,7], однако выражений для определения численных характеристик ПД в [6,7] не приведены. Поэтому целью настоящей работы является нахождение математической модели системы ИФАПЧ с ДДПКД, использующей ДСМ, и ИЧФД, имеющий неодинаковые токи заряда и разряда, поступающие на вход фильтра нижних частот (ФНЧ). По этой модели необходимо провести оценку ПД в зависимости от степени неравенства токов накачки. В работе будет рассмотрено два подхода к определению ПД:

1) определение дискретных составляющих ПД в импульсной модели ИФАПЧ с помощью дискретного преобразования Фурье (модель в среде MATLAB),

2) определение спектра шумов ПД в непрерывной нелинейной модели системы ФАПЧ (стохастический подход с применением спектрального анализа на основе преобразования Фурье в среде MATEMATICA5.1).

На рис.1 приведена структурная схема исследуемой системы ИФАПЧ.

С выхода ИЧФД (на вход которого подается опорный сигнал $e_0(t)$ и сигнал обратной связи $e_c(t)$, где t – текущее время) на вход ФНЧ с передаточной функцией $G(s)$ подается ток $i_Д(t)$. Ток $i_Д(t)$, показанный на рис.2, имеет импульсный характер и зависит от очередности поступления на вход ИЧФД сигналов $e_0(t)$ и $e_c(t)$.

Напряжение с ФНЧ $e_Ф(t)$ подается на устройство, которое с помощью усилительного звена с коэффициентом передачи $S_У$ [(рад/с)/вольт], суммирующего, на который подается начальная частота управляемого генератора (УГ) $\omega_Н$, интегрирующего со сбросом и релейного элемента (РЭ) с порогом $2\pi N_n$ звеньев моделирует УГ и ДДПКД с коэффициентом деления N_n. Сброс в нуль интегрирующего звена осуществляется в моменты времени срабатывания РЭ t_n, где $n = 1,2,3...$ – номера импульсов $e_c(t_n)$, приходящих на ИЧФД с ДДПКД (УГ совместно с РЭ определяют первую нелинейность системы ИФАПЧ).

Коэффициент деления N_n имеет две составляющие: N_0 – целая и ΔN_n – "дробная", которая формируется ДСМ со структурой (в терминологии [6]) MASH (Multitage noise Shaping). В частности, на рис.1 показан ДСМ MASH1111, который состоит из 4-х последовательно включенных накапливающих сумматоров (НС) ($x + y$ и элемен-

та задержки Д) и схемы кодирования, состоящей из 3-х сумматоров и 3-х элементов задержки. На схему кодирования с НС поступают сигналы переполнения П. Уменьшение числа НС и, соответственно, сумматоров и элементов Д в схеме кодирования уменьшает и "порядок" ДСМ. Последовательность импульсов ΔN_n периодична, ее период зависит от емкости НС – m, порядка ДСМ и числа a, поступающего на вход первого НС.

Средний коэффициент деления ДДПКД за период импульсной последовательности ΔN_n вычислится как $N_m = N_0 + \sum_{n=1}^{k\cdot m} \frac{\Delta N_n}{k \cdot m} = N_0 + \frac{a}{m}$, где

k – некоторое число, зависящее от структуры ДСМ и числа a [8].

Для пояснений дальнейших выкладок обратимся к рис.2, где изображены четыре случая (*a, b, c, d*) формирования $i_Д(t)$ в зависимости от опережения или отставания во времени импульсов сигнала обратной связи ИФАПЧ $e_c(t_n)$ относительно опорных импульсов $e_0(t)$. Здесь также T_0 – период $e_0(t)$, $n*T_0$ – моменты времени появления (передних фронтов) $e_0(t)$ на ИЧФД, $T_n = t_{n+1} - t_n$ – интервал времени появления двух соседних импульсов $e_c(t_n)$ на ИЧФД, τ_n, τ_{n+1} – два соседних импульса управления $i_Д(t)$ с амплитудами $i_М$ и $i_М * di$, где коэффициент $di \neq 1$ характеризует неравенство токов "накачки", поступающих на ФНЧ (и определяет вторую нелинейность системы ИФАПЧ). Наиболее общий вид импульсов $i_Д(t)$ соответствует случаю *d*, другие вытекают из *d*, если положить на интервале времени от t_n до t_{n+1} амплитуду положительного или (и) отрицательного импульсов равными нулю.

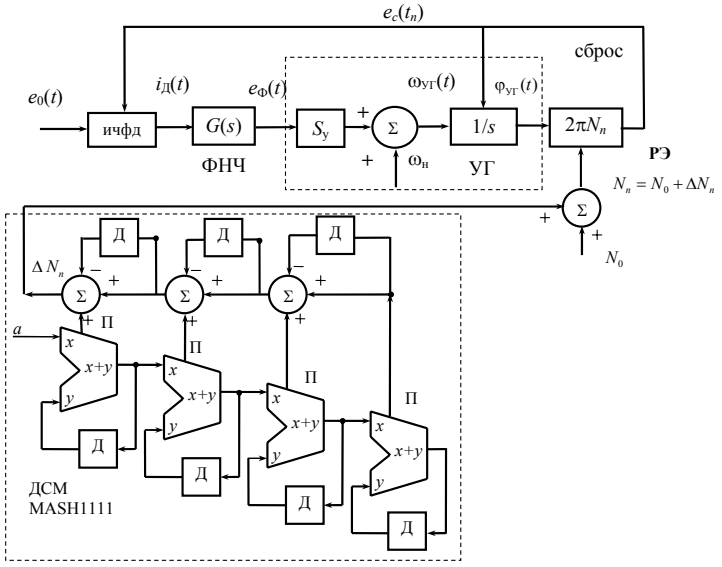


Рис.1. Структурная схема исследуемой системы ИФАПЧ

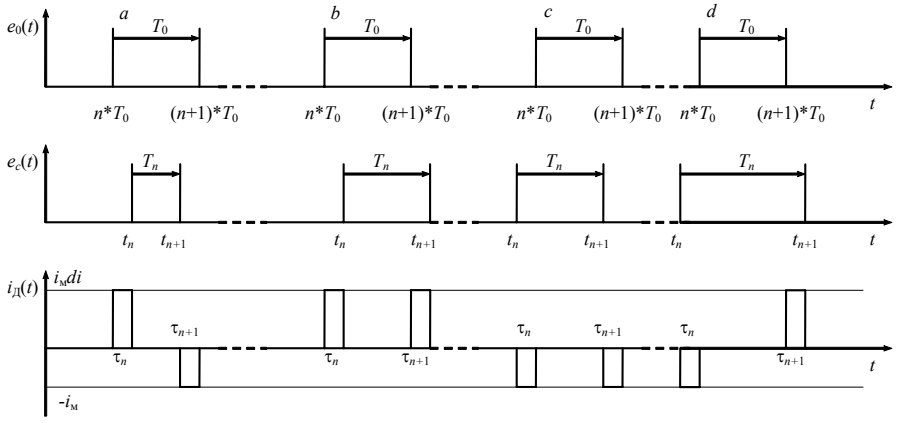


Рис.2. Случаи (*a, b, c, d*) формирования $i_Д(t)$

Для получения математической модели системы ИФАПЧ с ДДПКД будем использовать дифференциальные уравнения, описывающие ФНЧ в пространстве состояний вида

$$\left.\begin{aligned}\dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{A}\cdot\mathbf{X}+\mathbf{B}\cdot i_{\text{Д}}(t),\\ e_{\Phi}(t) &= \mathbf{C}\cdot\mathbf{X}.\end{aligned}\right\}, \qquad (1)$$

где **X** – вектор состояний ФНЧ, **A** – квадратная матрица состояния, **B** – вектор управления, **C** – вектор-строка для вычисления выходной координаты. Для проведения дальнейших выкладок удобно перейти от (1) к уравнениям состояний ФНЧ, матрица состояний которых имеет форму Жордана

$$\left.\begin{aligned}\dot{\mathbf{X}}_{\mathbf{C}} &= \mathbf{A}_{\text{Д}}\cdot\mathbf{X}_{\mathbf{C}}+\mathbf{B}_{\text{Д}}\cdot i_{\text{Д}}(t),\\ e_{\Phi}(t) &= \mathbf{C}_{\text{Д}}\cdot\mathbf{X}_{\mathbf{C}},\end{aligned}\right\}, \qquad (2)$$

где $\mathbf{X_C}$ – новый вектор состояний, связанный с **X** соотношением $\mathbf{X_C} = \mathbf{P^1}\cdot\mathbf{X}$, ($\mathbf{P^1}$ – матрица обратная к матрице **P** – правых собственных векторов матрицы **A**) $\mathbf{A_Д} = \mathbf{P^1}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{P}$ – диагональная матрица, содержащая на главной диагонали λ_i – собственные числа матрицы **A**, $i = 1,2,3,\ldots$, $\mathbf{B_Д} = \mathbf{P^1}\cdot\mathbf{B}$, $\mathbf{C_Д} = \mathbf{C}\cdot\mathbf{P}$.

Решение (2) на интервале времени от t_n до t_{n+1} запишем в виде

$$\mathbf{X_C}(\mathbf{t}) = \mathbf{e}^{\mathbf{A_Д}(\mathbf{t}-\mathbf{t_n})}\cdot\mathbf{X_C}(\mathbf{t_n}) + \int_{t_n}^{t}\mathbf{e}^{\mathbf{A_Д}(\mathbf{t}-\tau)}\cdot\mathbf{B_Д}\cdot i_{\text{Д}}(\tau)\cdot d\tau, \qquad (3)$$

где $\mathbf{e}^{\mathbf{A_Д(t)}}$ – переходная матрица, $\mathbf{X_C}(\mathbf{t}_n)$ – вектор состояний ФНЧ в момент времени t_n.

Подставив в (3) выражение для $i_{\text{Д}}(t)$ рис.2, получим

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{X_C}(\mathbf{t}_{n+1}) = \mathbf{e}^{\mathbf{A_Д}T_n}\cdot\mathbf{X_C}(\mathbf{t}_n)+\\ &+\left[\alpha\cdot i_M\cdot\mathbf{A_Д^{-1}}\left(\mathbf{e}^{\mathbf{A_Д}(T_n-\tau_n)}-\mathbf{e}^{\mathbf{A_Д}T_n}\right)+\right.\\ &\left.+\beta\cdot i_M\cdot di\cdot\mathbf{A_Д^{-1}}\left(\mathbf{e}^{\mathbf{A_Д}\tau_{n+1}}-\mathbf{E}\right)\right]\cdot\mathbf{B_Д}\\ &e_{\Phi}(t_{n+1}) = \mathbf{C_Д}\cdot\mathbf{X_C}(t_{n+1})\end{aligned}\right\}, \qquad (4)$$

где $\mathbf{A_Д^{-1}}$ – матрица, обратная к $\mathbf{A_Д}$, **E** – единичная диагональная матрица, коэффициенты α, β и $T_n = t_{n+1} - t_n$ в зависимости от случаев *a*, *b*, *c* и *d* определяются из табл.1:

Таблица 1

	α	β	T_n
a	0	0	$T_0-\tau_n-\tau_{n+1}$
b	0	1	$T_0-\tau_n+\tau_{n+1}$
c	1	0	$T_0+\tau_n-\tau_{n+1}$
d	1	1	$T_0+\tau_n+\tau_{n+1}$

Уравнения (4) дополним соотношением функционирования УГ и РЭ:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}}\omega_{\text{УГ}}(t)\,dt = 2\pi N_n. \qquad (5)$$

Так как $\omega_{\text{УГ}}(t) = \omega_{\text{Н}} + S_{\text{У}}\bullet e_{\Phi}(t)$, то, используя (2,3,5) и для $i_{\text{Д}}(t)$ рис.2 получим

$$\begin{aligned}&S_У\cdot\mathbf{C}\cdot\left\{\left(\mathbf{e}^{\mathbf{A_Д}T_\mathbf{n}}-\mathbf{E}\right)\cdot\mathbf{A_Д^{-1}}\cdot\mathbf{X_C}(\mathbf{t_n})+\right.\\ &+\left[i_M\cdot(\alpha\cdot\tau_n-\beta\cdot di\cdot\tau_{n+1})\cdot\mathbf{A_Д^{-1}}+\right.\\ &+\alpha\cdot i_M\cdot\left(\mathbf{e}^{\mathbf{A_Д}(T_\mathbf{n}-\tau_n)}-\mathbf{e}^{\mathbf{A_Д}T_\mathbf{n}}\right)\cdot\mathbf{A_Д^{-2}}+\\ &\left.\left.+\beta\cdot i_M\cdot di\cdot\left(\mathbf{e}^{\mathbf{A_Д}\tau_{n+1}}-\mathbf{E}\right)\cdot\mathbf{A_Д^{-2}}\right]\cdot\mathbf{B_Д}\right\}+\\ &+\omega_H\cdot T_n = 2\pi\cdot N_n. \qquad (6)\end{aligned}$$

Таким образом, если известна зависимость N_n, то разностные уравнения (4) и (6) позволяют рассчитывать как состояния ФНЧ $\mathbf{X_C}(t_\mathbf{n})$, так и параметры управляющих импульсов с ИФД τ_n, τ_{n+1}. Отметим, что разностное уравнение (6) является трансцендентным уравнением относительно τ_n, τ_{n+1} и для точного его решения необходимо применять различного рода итерационные процедуры.

Для расчета ПД на выходе системы ИФАПЧ необходимо иметь аналитическое выражение для отклонения фазы УГ $\Delta\varphi_n$ от стационарного положения. Для пояснения дальнейших выкладок обратимся к рис.3, где непрерывной линией условно показана зависимость $\varphi_{\text{УГ}}(t)$, штрихпунктирной линией – стационарное значение фазы УГ $\varphi_{\text{УГСТ}}(t)$, которое определяется выражением

$$\varphi_{\text{УГСТ}}(t) = 2\pi\left(N_0+\frac{a}{m}\right)\cdot\frac{t}{T_0},$$

$$\Delta_n = \varphi_{\text{УГ}}(t_n) - \varphi_{\text{УГСТ}}(t_n),$$

$$\varphi_n = \varphi_{\text{УГ}}(t_n+T_{kn}) - \varphi_{\text{УГ}}(t_n),$$

где T_{kn} – задержка во времени относительно t_n,

$$\Delta\varphi_n = \varphi_{\text{УГ}}(t_n+T_{kn}) - \varphi_{\text{УГСТ}}(t_n+T_{kn}).$$

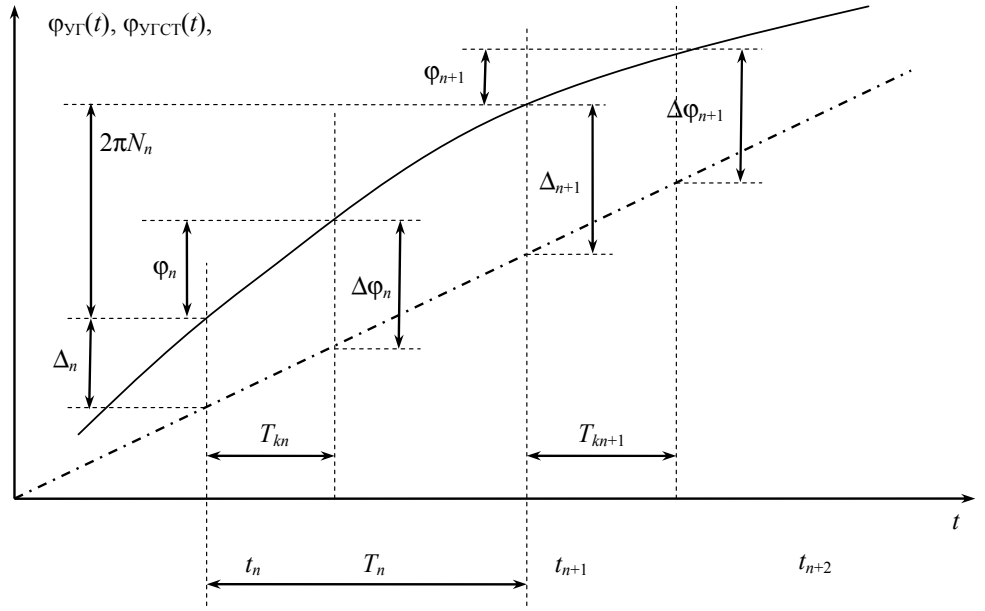


Рис.3. Отклонение фазы УГ $\Delta\varphi_n$ от стационарного положения

Из рис.3 также следуют следующие соотношения:

$$\Delta_n + 2\pi N_n = 2\pi N_m T_n / T_0 + \Delta_{n+1},$$

$$\Delta_n + \varphi_n = \Delta\varphi_n + 2\pi N_m T_{kn} / T_0 .$$

Из последних выражений найдем искомое разностное уравнение для $\Delta\varphi_n$, $\Delta\varphi_{n+1}$:

$$\Delta\varphi_{n+1} = \Delta\varphi_n + \varphi_{n+1} - \varphi_n + .$$

$$+2\pi N_m \left(T_{kn} - T_{kn+1} - T_n\right)/T_0 + 2\pi N_n . \qquad (7)$$

В (7) неизвестны выражения для φ_n, φ_{n+1}, которые найдем, используя соотношение аналогичное (5,6):

$$\varphi_n = \int_{t_n}^{t_n+T_{kn}} \omega_{УГ}(t)\,dt =$$

$$= S_Y \cdot \mathbf{C} \cdot \left\{ \left(\mathbf{e}^{\mathbf{A}_Д T_{kn}} - \mathbf{E} \right) \cdot \mathbf{A}_Д^{-1} \cdot \mathbf{X_C}(\mathbf{t_n}) + \right.$$

$$+ i_M \cdot \alpha \cdot \left[\tau_n \cdot \mathbf{A}_Д^{-1} + \left(\mathbf{e}^{\mathbf{A}_Д (T_{kn} - \tau_n)} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \mathbf{e}^{\mathbf{A}_Д T_{kn}} \right) \cdot \mathbf{A}_Д^{-2} \right] \cdot \left. \mathbf{B}_Д \right\} + \omega_H \cdot T_{kn}, \qquad (8)$$

где условия T_{kn} для случаев *a*, *b*, *c*, *d* определяются из табл.2:

Таблица 2

	Условия для T_{kn}
a	$0<T_{kn}<T_n$
b	$0<T_{kn}<T_n-\tau_n$
c	$\tau_n<T_{kn}<T_n$
d	$\tau_n<T_{kn}<T_n-\tau_{n+1}$

Наиболее просто (7) выглядит, когда информации об $\Delta\varphi_n$, $\Delta\varphi_{n+1}$ вычисляется в моменты времени t_n, t_{n+1}, в этом случае φ_n, φ_{n+1}, T_{kn}, T_{kn+1} равны нулю и соотношение (7) представим в виде

$$\Delta\varphi_{n+1} = \Delta\varphi_n + 2\pi N_0 [1 - T_n / T_0 +$$

$$+ \Delta N_n / N_0 - a \cdot T_n / (m T_0 N_0)].$$

Найдем выражения для ΔN_n, генерируемого ДСМ, изображенным на рис.1. Известно, что число в *i*-м накапливающем сумматоре $\mathrm{HC}_i[n]$ в зависимости от *n*-го тактируемого сигнала $e_c(t_n)$ меняется по закону

$$\mathrm{HC}_i[n+1] = \mathrm{mod}\left(\mathrm{HC}_i[n] - \mathrm{HC}_{i-1}[n+1], m\right), \quad (9)$$

где **mod**(*x, m*) – операция определения остатка от деления числа *x* на *m* (для 1-го НС – $\mathrm{HC}_1[n+1] =$ **= mod**(HC_1[n] + *a*, *m*)).

В момент переполнения на выходе П НС появляется сигнал с $\mathrm{HC}_i[n]$ равный единице, в другие моменты времени этот сигнал равен нулю. Это можно записать в виде

$$\mathrm{CHC}_i[n] = \mathrm{HC}_i[n] < \mathrm{HC}_i[n-1]. \qquad (10)$$

Используя (9, 10), функционирование ДСМ рис.1 можно записать в виде системы матричных разностных уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{HC[n+1]} = \mathbf{AH} \times \mathbf{HCM[n]} + \mathbf{BH} \cdot a, \\ &\mathbf{HCM[n]} = \mathrm{mod}\left(\mathbf{HC}[\mathbf{n}], m\right), \\ &\mathbf{CHC}[\mathbf{n}] = \mathbf{HCM}[\mathbf{n}] < \mathbf{HCM}[\mathbf{n-1}], \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

где **НС** = [$НС_1$, $НС_2$, $НС_3$, $НС_4$] – вектор столбец состояний НС,

$$\mathbf{АН}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$ – матрица,

НСМ = [$НСМ_1$, $НСМ_2$, $НСМ_3$, $НСМ_4$] – вектор столбец состояний НС с учетом осуществления операции **mod**(*x, m*),

ВН = [1, 1, 1, 1] – вектор столбец, **СНС** = = [$СНС_1$, $СНС_2$, $СНС_3$, $СНС_4$] – вектор столбец.

Обозначив z^{-1} как оператор задержки на один такт, из рис.1 найдем выражение для ΔN_n как

$$\Delta N_n = СНС_1[n]+СНС_2[n]\cdot\left(1-z^{-1}\right)+$$

$$+СНС_3[n]\cdot\left(1-z^{-1}\right)^2+СНС_4[n]\cdot\left(1-z^{-1}\right)^3, \quad (12)$$

где, например:

$$СНС_4[n]\cdot\left(1-z^{-1}\right)^3 = СНС_4[n]-$$

$$-3СНС_4[n-1]+3СНС_4[n-2]-СНС_4[n-3].$$

Обобщая (12) в зависимости от *dsm_order* – числа НС формирующих ДСМ, можно записать

$$\Delta N_n = \sum_{i=1}^{dsm_order} СНС_i[n]\cdot\left(1-z^{-1}\right)^{dsm_order}. \quad (13)$$

Таким образом, (4, 6, 7 и 13) представляют собой систему нелинейных (кроме (13)) разностных уравнений для вычисления помех дробности в виде отклонения фазы УГ $\Delta\varphi_n$ от стационарного положения. Однако ввиду того, что емкость НС *m* в современных микросхемах достигает значений 2^{22} и более, а период последовательности ΔN_n составляет *k*m*, где *k*, например для *dsm_order* = 3, может достигать значения 6, решение (6) итерационными процедурами весьма трудоемко. Выражение (6) можно упростить, считая τ_n, $\tau_{n+1} \ll T_0$, элементы вектора $\mathbf{X_C}(t_n)$ малыми, $\lambda_1 \to 0$ (система ИФАПЧ проектируется астатической по разности опорного сигнала и сигнала с ДДПКД), $\omega_Н = 2\pi N_m/T_0$, число собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_l$ матрицы **A** $l \geq 3$. Разложим экспоненциальные члены (6) в ряд Тейлора и пренебрежем членами третьего и высшего порядка малости. Опустив промежуточные вычисления, приведем разностное уравнение для определения τ_{n+1} во втором приближении:

$$\overline{\tau_{n+1}} = \frac{\alpha_1\overline{\tau_n}+\alpha_2 dn+\alpha_3 au\left\{\begin{matrix}s_xce+\alpha_4\cdot\overline{\tau_n}\cdot s_xc-\\ \alpha\overline{\tau_n}\cdot s_cbl-\alpha\dfrac{\overline{\tau_n}^2}{2}\cdot s_cb\end{matrix}\right\}}{1+au\left\{s_xc-\alpha\cdot\overline{\tau_n}\cdot s_cb\right\}},$$

(14)

где α_1, α_2, α_3 для случаев *a*, *b*, *c* и *d* определяются из табл.3,

Таблица 3

	α_1	α_2	α_3	α_4
a	–1	–1	1	–1
b	1	1	–1	–1
c	1	–1	1	1
d	–1	1	–1	1

$$\overline{\tau_{n+1}}=\frac{\tau_{n+1}}{T_0},\ \overline{\tau_n}=\frac{\tau_n}{T_0},$$

$$dn=\frac{\Delta N_n - a/m}{N_m},\ au=\frac{S_y i_M C_1 B_1}{2\pi N_m}T_0^2.$$

$$s_xce=\overline{X_1}+\sum_{i=2}^{l}\overline{X_i}\,\overline{C_i}\,\frac{e^{\overline{\lambda_i}}-1}{\overline{\lambda_i}},$$

$$s_xc=\overline{X_1}+\sum_{i=2}^{l}\overline{X_i}\,\overline{C_i}\cdot e^{\overline{\lambda_i}},\ s_cb=1+\sum_{i=2}^{l}\overline{C_i}\cdot\overline{B_i}e^{\overline{\lambda_i}},$$

$$s_cbl=1+\sum_{i=2}^{l}\overline{C_i}\,\overline{B_i}\,\frac{e^{\overline{\lambda_i}}-1}{\overline{\lambda_i}},$$

$$\overline{B_i}=\frac{B_i}{C_1},\ \overline{C_i}=\frac{C_i}{C_1},\ \overline{\lambda_i}=\frac{\lambda_i}{T_0},\ \overline{X_i}=\frac{X_i(t_n)}{B_1 T_0 i_M},$$

C_i – *i*-й элемент строки $C_Д$, B_i – *i*-й элемент столбца $B_Д$, $X_i(t_n)$ – *i*-й элемент столбца $X_C(t_n)$.

В скалярном виде 1-е уравнение в (4) в предположении $\lambda_1 \to 0$ запишем:

$$X_1(t_{n+1}) = X_1(t_n)+\left(-\alpha\cdot\tau_n+\beta\cdot di\cdot\tau_{n+1}\right)\cdot B_1\cdot i_M$$

.....

$$X_i(t_{n+1}) = e^{\lambda_i T_n}\cdot X_i(t_n)+\left[\alpha\cdot\left(e^{\lambda_i(T_n-\tau_n)}-e^{\lambda_i T_n}\right)\Big/\lambda_i+\right.$$

$$\left.+\beta\cdot di\cdot\left(e^{\lambda_i\tau_{n+1}}-1\right)\Big/\lambda_i\right]\cdot B_i\cdot i_M.$$

(15)

Аналогично для $\lambda_1 \to 0$ в скалярном виде уравнение (8) запишем как

$$\varphi_n = S_{\text{У}} \cdot \{C_1 \cdot X_1(t_n) \cdot T_{kn} + \\ + \sum_{i=2}^{l} C_i \cdot X_i(t_n) \cdot \left(e^{\lambda_i T_{kn}} - 1\right) / \lambda_i + \\ + \alpha \cdot i_M \cdot C_1 \cdot B_1 \cdot \left(\tau_n^2 / 2 - T_{kn} \cdot \tau_n\right) + \\ + \alpha \cdot i_M \cdot \sum_{i=2}^{l} C_i \cdot B_{\text{i}} \left[\left(e^{\lambda_i (T_{kn} - \tau_n)} - \right.\right. \\ \left.\left. - e^{\lambda_i T_{kn}}\right) / \lambda_i^2 + \tau_n / \lambda_i\right]\} + \omega_{\text{H}} \cdot T_{kn}. \qquad (16)$$

Для расчета ПД Δ_n в среде MATLAB6.5 по выражениям (7, 13–16) разработана программа *ifap_dsm*. В этой программе к Δ_n применяется процедура *fft* – дискретного преобразования Фурье. Некоторые результаты расчетов ослабления ПД в децибелах приведены на рис.4.

При расчете дополнительно задавались следующие параметры: *dsm_order* = 3, $m = 2^{14}$, частота опорного сигнала – $1/T_0 = 32.768*10^6$ Гц, число на входе 1-го НС $a = 1$, $N_0 = 64$. Задавались также частота среза амплитудно-частотной характеристики разомкнутой системы ФАПЧ $f_{\text{СР}} = 350*10^3$ Гц и ФНЧ с передаточной функцией

$$G(s) = \frac{e_{\Phi}(s)}{i_{\text{Д}}(s)} = \frac{T_1 s + 1}{C_1_C_2 s(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)(T_4 s + 1)},$$

где T_1, T_2, T_3, T_4, $C_1_C_2$ – некоторые коэффициенты, определяемые в результате расчета системы ИФАПЧ. В частности, выбирались $T_2 \approx T_3 \approx T_4$ при проектировании системы по показателю колебательности $M = 1{,}3$ [4].

На рис.4 приведены кривые:

1 – ослабление ПД в децибелах от частоты при расчете по линейной модели ИФАПЧ [3],

2 – ослабление ПД при расчете по *ifap_dsm* для *di* = 1,

3 – ослабление ПД при *di* = 1,05,

4 – логарифмическая амплитудно-частотная характеристика замкнутой системы ФАПЧ

$$L(\omega) = 20 \lg \left| \frac{G(j\omega) \cdot S_{\text{У}} \cdot i_M / (N_0 j\omega)}{1 + G(j\omega) \cdot S_{\text{У}} \cdot i_M / (N_0 j\omega)} \right|,$$

по оси *x* отложена частота в Гц.

Из рис.4 видно, что на ослабление ПД в полосе $f_{\text{СР}}$ наиболее существенно сказывается нелинейность, обусловленная неравенством токов накачки ИЧФД (кривая 3 намного выше, чем 2 и 1).

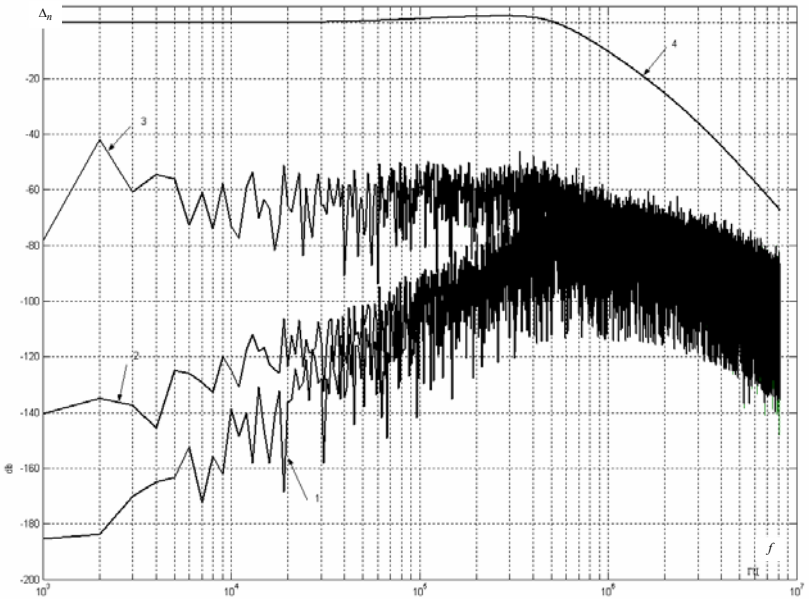


Рис.4. Уровень ПД в кольце ИФАПЧ

Исследования с помощью *ifap_dsm* показали, что в полосе пропускания ИФАПЧ $f_{\text{СР}}$:

1) уровень ПД линейно зависит от значения $|di–1|$ и не зависит от $f_{\text{СР}}$,

2) для $di \neq 1$ уровень ПД не зависит от величин T_{kn}, T_{kn+1},

3) для $di = 1$ уровень ПД "слабо" зависит от величин T_{kn}, T_{kn+1} и "сильно" зависит от значения полосы $f_{\text{СР}}$ (чем больше $f_{\text{СР}}$, тем хуже ослабление ПД),

4) для $di \neq 1$ уровень ПД уменьшается с увеличением порядка ДСМ – *dsm_order* (исследовалось влияние порядка *dsm_order* на уровень ПД при значениях от 2 до 4).

Рассмотрим "упрощенный" подход к определению ПД, основанный на представлении

ДСМ в виде устройства генерирующего “цветной” шум [3,9]. Для пояснения последующего материала обратимся к рис.5, в верхней части которого изображен ДСМ с элементами:

ИШ – источник шума, генерирующий белый шум со спектральной плотностью $2\pi\Big/\left(12N_0^2\right)$;

Д – дискретизатор, на выходе которого образуется дискретный белый шум;

ФФ – формирующий фильтр с передаточной функцией $\left(1-Z^{-1}\right)^{dsm_order}$, где $Z^{-1}=e^{-sT_0}$;

И – интегратор и ЭНП – экстраполятор нулевого порядка с передаточными функциями $1\Big/\left(1-Z^{-1}\right)$ и $\left(1-Z^{-1}\right)\Big/s$ соответственно.

Спектральная плотность шумов на выходе этого ДСМ определится как

$$S_{\text{ДСМ}}(\omega)=\frac{(2\pi)^2\left|1-e^{-j\omega T_0}\right|^{2\cdot dsm_order}}{12N_0^2\cdot T_0\cdot\omega^2}.$$

Если ввести безразмерную частоту $w=\omega * T_0/2$, то последнее выражение запишется в виде

$$S_{\text{ДСМ}}(w)=\frac{(2\pi)^2\cdot T_0\cdot 2^{2\cdot(dsm_order-1)}\left|\sin(w)\right|^{2\cdot dsm_order}}{12N_0^2w^2}. \quad (17)$$

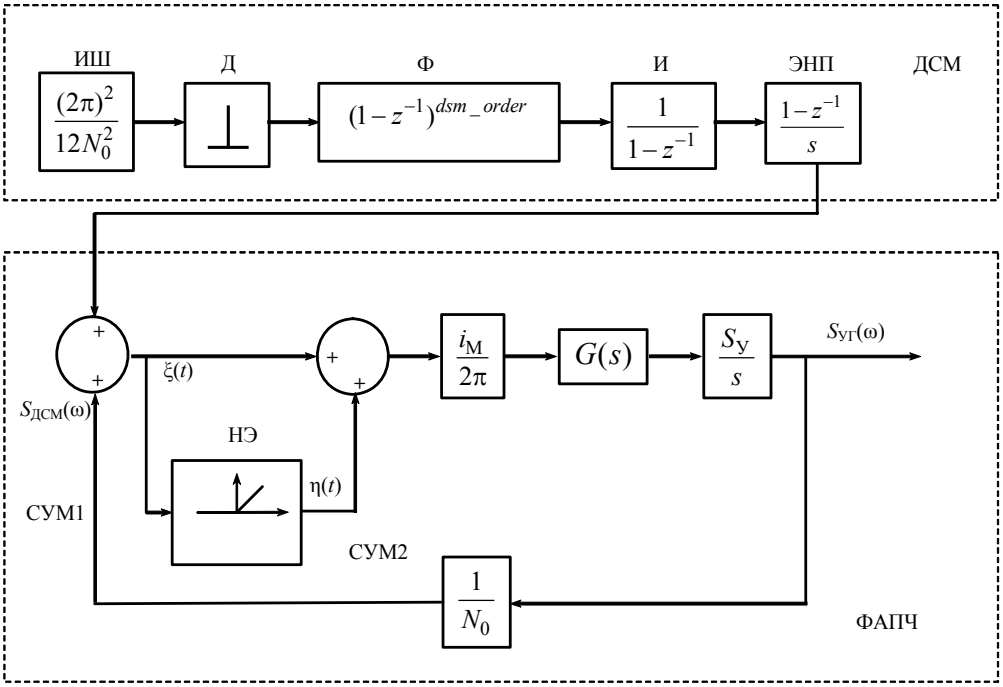


Рис.5. Система ФАПЧ с ДСМ в виде устройства генерирующего “цветной” шум

В нижней части рис.5 нелинейная непрерывная ФАПЧ, в которой сумматоры СУМ1 и СУМ2, НЭ – нелинейный элемент с характеристикой

$$\eta(t)=\begin{cases}(di-1)\cdot\xi(t), & \text{при } \xi(t)\ge 0\\ 0, & \text{при } \xi(t)<0,\end{cases} \quad (18)$$

где $\xi(t)$ – входной сигнал НЭ, $\eta(t)$ – выходной сигнал НЭ, и элемент с передаточной функцией $i_M/2\pi$ характеризуют фазовый детектор с неравными токами накачки. Другие элементы ФАПЧ понятны из рисунка.

При решении задачи определения спектральной плотности шумов на выходе ФАПЧ $S_{УГ}(\omega)$ для модели шумов на входе (17) примем следующие ограничения:

1) $|di-1|<<1$, (в реальных ИФД $|di-1|<<0{,}1$);

2) система ФАПЧ является ФНЧ (при воздействии на ее вход) с частотой среза $f_{СР}$, удовлетворяющей условию $f_{СР}<<1/2T_0$;

3) шум на входе ФАПЧ является нормальным стационарным процессом с нулевым средним значением;

4) в передаточной функции ФНЧ $G(s)$ присутствует один нулевой полюс (это приводит к тому, что $m_{1\eta}$ – постоянная составляющая случайного процесса $\eta(t)$ на выходе НЭ равна сред-

нему значению случайного процесса $m_{1\xi}$ на входе НЭ со знаком минус, т.е. постоянная составляющая на выходе СУМ2 равна нулю).

Используя ограничения 3 и 4, заимствуем из [10] выражение для корреляционной функции процесса $\eta(t)$:

$$B_\eta(\tau) = (di-1)^2\sigma^2\sum_{i=0}^{\infty}\frac{R^i(\tau)}{i!}\left[\varphi^{(i-2)}\left(m_{1\xi}/\sigma\right)\right]^2, \quad (19)$$

где σ^2 – дисперсия $\xi(t)$, $R(\tau)$ – нормированная автокорреляционная функция $\xi(t)$,

$$\varphi^{(-2)}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda}\varphi^{(-1)}(t)dt,$$

$$\varphi^{(-1)}\left(m_{1\xi}/\sigma\right) = F\left(m_{1\xi}/\sigma\right),\ F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}z^2}dz -$$

интеграл вероятности,

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$\varphi^{(i)}(x)$ – i-я производная от $\varphi(x)$ по dx.

Из (19) и учитывая ограничение 4, найдем выражение для $m_{1\xi}$:

$$-m_{1\xi} = (di-1)\cdot\sigma\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(m_{1\xi}/\sigma\right)^2} + \right.$$

$$\left. +0{,}5\frac{m_{1\xi}}{\sigma} + 0{,}5\frac{m_{1\xi}}{\sigma}erf\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{m_{1\xi}}{\sigma}\right)\right], \quad (20)$$

где $$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt.$$

Уравнение (20) является трансцендентным относительно $m_{1\xi}$, поэтому, учитывая ограничение 1, разложим правую часть (20) в ряд Тейлора по $m_{1\xi}/\sigma$ и, отбрасывая величины второго порядка малости, получим в итоге

$$\frac{m_{1\xi}}{\sigma} \approx -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{di-1}{1+0{,}5(di-1)}. \quad (21)$$

Используем (21) для определения коэффициентов при $R^i(\tau)$ в ряде (19), ограничившись значением $i = 2$, т.е.

$$B_\eta(\tau) \approx \left(m_{1\eta}\right)^2 + (di-1)^2\sigma^2\left[F\left(m_{1\xi}/\sigma\right)\right]^2 R(\tau) + \quad (22)$$
$$+(di-1)^2\sigma^2\frac{1}{4\pi}e^{-\left(m_{1\xi}/\sigma\right)^2}R^2(\tau).$$

В ряде (22) нас интересует 3-й член, который характеризует трансформацию "высокочастотной" части спектра $\xi(t)$ в "низкочастотную" область

$$B_{2\eta}(\tau) = (di-1)^2\sigma^2\frac{1}{4\pi}R^2(\tau), \quad (23)$$

который практически не зависит от значения $m_{1\xi}/\sigma$ ввиду его малости. Учитывая ограничения 1 и 2, будем считать, что $\xi(t)$ соответствует процесс со спектральной плотностью (17), дополненный постоянной составляющей $m_{1\xi}$. Тогда, используя известные соотношения Винера-Хинчина для связи между спектральной плотностью шумов и автокорреляционной функцией, получим

$$B_\xi(\bar{\tau}) = \sigma^2_{dsm_order}R_{dsm_order}(\bar{\tau}),$$

где $\sigma^2_{dsm_order} = \frac{(2\pi)^2}{12N_0}2^{2\cdot dsm_order-1}\frac{1}{k_{dsm_order}}$,

в котором k_{dsm_order} – коэффициенты, определяемые из табл.4,

Таблица 4

dsm_order	k_{dsm_order}
2	4
3	16/3
4	32/5

$$R_{dsm_order}(\bar{\tau}) =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty k_{dsm_order}\frac{\sin(w)^{2dsm_order}}{w^2}\cos(w\bar{\tau})dw, \quad (24)$$
$$\bar{\tau} = 2\tau/T_0.$$

Для различных порядков ДСМ с помощью методов символьной математики системы MATHEMATICA5.1 из (20) получим

$$R_2(\bar{\tau}) = \frac{1}{8}\left[4-3\bar{\tau}-4(-2+\bar{\tau})sign(2-\bar{\tau})+\right.$$
$$\left.+(-4+\bar{\tau})sign(4-\bar{\tau})\right],$$

$$R_3(\bar{\tau}) = \frac{1}{24}\left[12-10\bar{\tau}-15(-2+\bar{\tau})sign(2-\bar{\tau})+\right.$$
$$\left.+6(-4+\bar{\tau})sign(4-\bar{\tau})+6sign(6-\bar{\tau})-\bar{\tau}sign(6-\bar{\tau})\right],$$

$$R_4(\bar{\tau}) = \frac{1}{80}\left[40-35\bar{\tau}-56(-2+\bar{\tau})sign(2-\bar{\tau})+\right.$$
$$+28(-4+\bar{\tau})sign(4-\bar{\tau})+48sign(6-\bar{\tau})-$$
$$\left.-8\bar{\tau}sign(6-\bar{\tau})-8sign(8-\bar{\tau})+\bar{\tau}sign(8-\bar{\tau})\right]. \quad (25)$$

Подставим (25) в (23) и проведем преобразование Фурье от $B_{2\eta}(\tau)$ с помощью системы MATHEMATICA5.1. В итоге получим выражения для спектральной плотности шумов $\eta(t)$ соответствующих $B_{2\eta}(\tau)$ для различных порядков ДСМ

$$S_{2dsm_order}(w) = \\ = (di-1)^2 \frac{\sigma^2_{dsm_order}}{4\pi} S_{dsm_order}(w), \quad (26)$$

где

$$S_2(w) = -\frac{12w - 8w\cos(2w) + 8\sin(2w) + \sin(4w)}{4w^3},$$

$$S_3(w) = -\left[-120w - 120\cos(2w) - 12w\cos(4w) + \right. \\ \left. +75\sin(2w) + 24\sin(4w) + \sin(6w)\right] \Big/ 36w^3$$

$$S_4(w) = \frac{-1}{400w^3}\left[-1400w - 1680\cos(2w) - \right. \\ -336w\cos(4w) - 16w\cos(6w) + 784\sin(2w) + \\ \left. +392\sin(4w) + 48\sin(6w) + \sin(8w)\right].$$

Зависимости $S_2(w)$, $S_3(w)$, $S_4(w)$ приведены на рис.6.

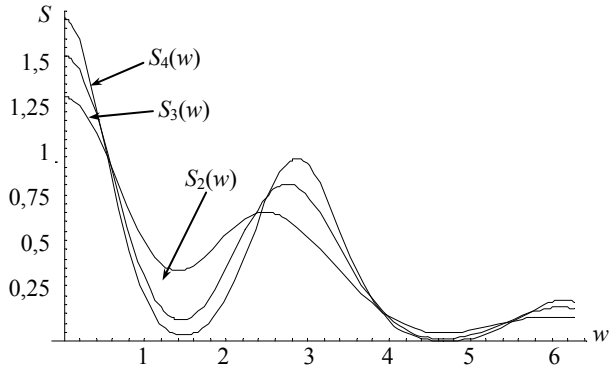


Рис.6. Зависимости $S_2(w)$, $S_3(w)$, $S_4(w)$

Учитывая ограничение 2, аппроксимируем эти зависимости белым шумом, прошедшим через интегрирующее звено с передаточной функцией $1/(1 + T_{dsm_order}*s)$. Для этого разложим $S_2(w)$, $S_3(w)$, $S_4(w)$ в ряд Тейлора в системе MATHEMATICA5.1 и удержим первые два члена. В итоге получим

$$S_{adsm_order}(w) = \\ = K_{adsm_order} \frac{1}{1 + T_{adsm_order} \cdot w^2}, \quad (27)$$

где K_{dsm_order} и T_{dsm_order} в зависимости от dsm_order приведены в табл.5.

Таблица 5

dsm_order	K_{dsm_order}	T_{dsm_order}
2	1,333	1,41
3	1,555	1,70
4	1,76	1,97

Линеаризуем систему ФАПЧ (рис.5) (считаем, что коэффициент передачи от выхода СУМ2 к выходу СУМ1 равен $(1+di)/2$) по отношению к $S_{ДСМ}(\omega)$; переносим $S_{2\eta}(w)$ к плюсовой точке СУМ1 и считаем, что коэффициент передачи системы ФАПЧ от выхода звена $S_У/s$ к плюсовому входу СУМ1 в полосе пропускания ФАПЧ равен N_0. На основании этого с учетом (17, 27) найдем выражение спектральной плотности $S_{УГ}(\omega)$ в полосе пропускания ФАПЧ:

$$S_{УГ}(\omega) = \left[S_{ДСМ}(\omega) + S_{2\eta}(\omega)\right] \cdot N_0^2 = \\ = \frac{\pi^2}{3} T_0 (2w)^{2(dsm_order-1)} + \\ + (di-1)^2 \frac{\pi}{3} T_0 2^{2(dsm_order-2)} \frac{K_{adsm_order}}{K_{dsm_order}}. \quad (28)$$

Соотношение (28) позволяет найти частоту среза ФАПЧ, когда $S_{2\eta}(2\pi f_{СР}) \ge S_{ДСМ}(2\pi f_{СР})$ (т.е. уточнить ограничение 2). В этом случае справедливы все проведенные выше выкладки:

$$f_{СР} \le \frac{1}{\pi T_0}\left[(di-1)^2 \frac{1}{4\pi} \frac{K_{adsm_order}}{K_{dsm_order}}\right]^{\frac{1}{2(dsm_order-1)}}. \quad (29)$$

Например, для $dsm_order = 3$ и $di = 1{,}05$ $f_{СР} \le 0{,}0275 * 1/T_0$.

Для сравнения результатов расчетов ПД по “точной” и приближенной модели найдем дисперсию шумов, вычисленных по (28) с учетом (29) в полосе частот

$$\Delta\omega = 2\pi \frac{1}{T_0 \cdot k \cdot m},$$

$$\sigma^2_{\Delta\omega} = (di-1)^2 \frac{\pi^2}{3} 2^{2dsm_order-3} \frac{K_{adsm_order}}{K_{dsm_order}} \frac{1}{k \cdot m}. \quad (30)$$

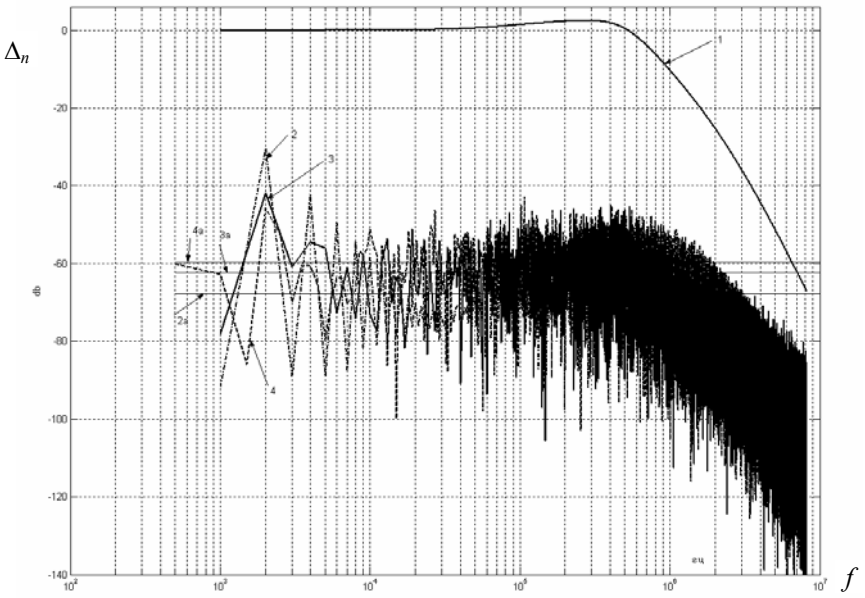


Рис.7. Результаты расчетов ПД в дБ по программе *ifap_dsm* для различных порядков ДСМ

На рис.7, иллюстрирующем это сравнение, приведены результаты расчетов ПД в дБ по программе *ifap_dsm* для различных порядков ДСМ: кривая 2 – для *dsm_order*; 2, 3 – для 3-го порядка; 4 – для 4-го порядка; прямые 2а, 3а, 4а рассчитаны для $\sigma_{\Delta\omega}$ по (30) и соответственно для 2, 3 и 4-го порядков ДСМ. Параметры ФАПЧ выбирались такими же, как при расчетах кривых на рис.4 и *di* = 1,05. Из анализа данных, приведенных на рис.7, можно сделать вывод, что расчеты ПД по приближенной модели можно рассматривать как "оценочные": особенно велико отклонение уровней дискретных ПД от оценочного значения при *dsm_order* = 2.

Вывод. При неравенстве токов накачки ИЧФД происходит увеличение помех дробности в полосе пропускания системы ИФАПЧ. Для нахождения уровней ПД необходимо пользоваться "точными" выражениями, разработанными в первой части статьи. Для проведения "оценочных" вычислений ПД, а также определения влияния отдельных параметров ФАПЧ (например, *di*, T_0) на тенденции изменения ПД можно пользоваться упрощенными выражениями (28, 30).

Литература

1. *Варфоломеев Г.В.* Спектр помех дробности в системе фазовой АПЧ с дробным делителем частоты / Г.В. Варфоломеев // Техника средств связи. – Сер. ТРС. – 1978.– Вып. 10(21).– С.66–71.

2. *Козлов В.И.* Синтезаторы частот с модуляцией дробных коэффициентов деления в петле ФАПЧ / В.И. Козлов, А.В. Паленков, А.А. Ряполов // Электросвязь. – 1988. – №9.

3. *Романов С.К.* Определение помех дробности в синтезаторах частот с системами ФАПЧ, использующих дельта-сигма модуляторы в дробных делителях частоты / С.К. Романов, И.А. Марков // Теория и техника радиосвязи : научн.-техн.сб. / ОАО «Концерн «Созвездие». – Воронеж, 2006. – Вып. 1. – С. 97–102.

4. *Левин В.А.* Синтезаторы частот с системой импульсно-фазовой автоподстройки / В.А. Левин, В.Н. Малиновский, С.К. Романов. – М. : Радио и связь, 1989. – 232 с.

5. *Романов С.К.* Определение помех в системе ИФАПЧ с дробным делителем частоты в цепи обратной связи / С.К. Романов, Д.Н. Рахманин // Теория и техника радиосвязи : научн.-техн.сб. / ВНИИС. – Воронеж, 2003. – Вып. 2. – С. 73–81.

6. *Yipinq Fan*. Model, Analyze, and Simulate ∑ΔFractional-N Frequency Synthesizers / Yipinq Fan. MICROWAVES&RF, December 2000.

7. *Pamarti S.*, *Jansson L.*, *Galton I.*, *Wideband A.* 2.4-GHz Delta-Sigma Fractional-N PLL With 1-Mb/s In – Loop Modulation, IEEE J. Solid-State Circuits. – 2004. – Vol. 39, №1, January. – Pp. 49–62.

8. *Путилин И.П.* Методика расчета спектра помехи в синтезаторе частот с модуляцией коэффициента деления / И.П. Путилин, С.К. Романов // Техника средств связи. – Сер. ТРС. – 1991.– Вып. 3. – С. 101–108.

9. *Brian M. Miller,* Multiple-Modulator Fractional-N Divider, U.S. Patent 5038117, August 6, 1991.

10. *Заездный А.М.* Основы расчетов по статистической радиотехнике / А.М. Заездный. – М. : Связь, 1969. – 447 с.

Получено 15.05.06 г.

УДК 681.3.014

МАШИНА СОСТОЯНИЙ ПРОЦЕССА ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ ФАЗЫ НА ПРОИЗВОЛЬНЫЙ УГОЛ В ВЫСОКОДОБРОТНОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОМ КОЛЕБАТЕЛЬНОМ КОНТУРЕ

Н.М. НАЗАРОВ

Описана машина состояний, осуществляющая мгновенный переход фазы в высокодобротном последовательном колебательном контуре.

В работе [1] описан способ мгновенного переключения фазы в высокодобротном контуре. Обоснована необходимость решения задачи перевода колебательного контура из произвольного состояния на линию переключения. В данной работе описывается машина состояния, позволяющая решить эту задачу. Процесс её решения осуществляется с использованием вспомогательных переключений входного сигнала, ускоряющих переход, но не вносящих дополнительных фазовых сдвигов.

Описание алгоритма в виде машины состояния выбрано в связи с тем, что оно позволяет легко переходить к другим представлениям. Так, в [2] раскрыт вопрос формирования прошивки для ПЛИС с использованием аппаратных языков HDL, в которых предусмотрены специальные средства работы с машинами состояния. В [3] показана тождественность проблем, решаемых с помощью машин состояния и с помощью формальных языков и грамматик. В [4] изучены методы синтеза цифровых схем, с помощью которых легко перейти от представления в виде машины состояния к схеме, построенной на дискретных логических элементах. По этим причинам выбранный способ описания алгоритма представляется наиболее обобщённым и удобным.

Машина состояний изображена на рис.1.

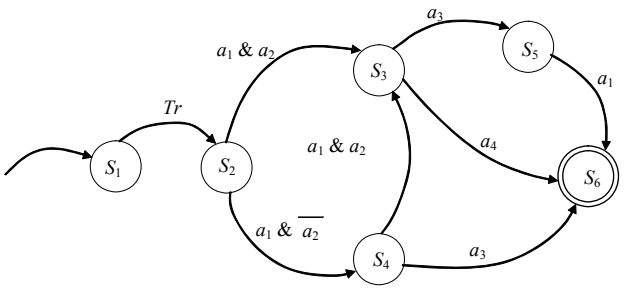


Рис.1. Машина состояний

На рис.1 приняты следующие обозначения: $S_1 \ldots S_6$ – состояния; $a_1 \ldots a_4$ – аргументы логических функций условий перехода. Стрелки между состояниями показывают направления переходов из одного состояния в другое. Надписи над стрелками обозначают условия, выполнение которых приводит к переходу в следующее состояние.

Рассмотрим аргументы логических функций условий перехода. Все аргументы являются логическими переменными. Они могут принимать значения из множества {ИСТИНА, ЛОЖЬ}. Переменная a_1 принимает истинное значение в те моменты, когда становится истинным выражение

$$x_2 = 0, \tag{1}$$

где x_2 – координата пространства состояния. Переменная a_2 принимает истинное значение в те моменты, когда становится истинным выражение

$$x_1 \in [F_1, F_2], \tag{2}$$

где x_1 – координата пространства состояния; F_1 и F_2 – фокусы системы. Переменная a_3 принимает истинное значение, когда истинно выражение

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_g. \tag{3}$$

В выражении (3) переменная $\Delta\varphi$ представляет собой угол, на который изменится фаза выходного колебания, если произвести изменение входного напряжения в текущий момент времени. Переменная $\Delta\varphi_g$ символизирует заданное приращение фазы выходного колебания. Значение переменной a_4 определяется логическим значением выражения

$$\Delta\varphi_g = \pi. \tag{4}$$

Символ & обозначает конъюнкцию. Надчёркивание над логической переменной означает инвертирование.

Переменная *Tr* принимает истинное значение, когда на вход системы поступает сигнал разрешения начала переключения фазы.

Раскроем содержание состояний. Состояние S_1 – начальное. Находясь в этом состоянии, система подаёт на вход выходного колебательного контура меандр на несущей частоте ω_0 с начальной фазой φ_0. По завершении переходных процессов в контуре устанавливается синусоидальное колебание, фаза которого совпадает с фазой входного меандра φ_0. По сути, в этом состоянии производится «накачка» контура энергией входных колебаний с начальной фазой φ_0. Из состояния S_1 возможен переход лишь в состояние S_2. Этот переход выполняется при поступлении на вход системы команды на начало переключения фазы *Tr*.

В состоянии S_2 система производит наблюдение за выходными координатами. В это время на вход колебательного контура подаётся постоянное напряжение, равное напряжению, присутствовавшему на входе контура в момент прихода сигнала *Tr*. Смысл этого состояния – синхронизация прихода команды на переключение фазы с наступлением условий, пригодных для начала этого переключения. Выйти из состояния S_2 система может тогда, когда координата x_2 перейдёт нулевое значение и изменит свой знак на противоположный, т.е. переменная a_1 примет истинное значение. При этом, как видно на рис.1, переход будет выполнен либо в состояние S_3, либо в S_4. Переход в состояние S_3 производится в том случае, если система находится между фокусами (переменная a_2 приняла истинное значение). В обратном случае (переменная a_2 приняла ложное значение) система переходит в состояние S_4.

В состоянии S_3 на входе колебательного контура фиксируется напряжение, присутствовавшее в момент перехода из прежнего состояния. Находясь в S_3, система ожидает момент пересечения траекторией движения линии переключения фазы на заданный угол $\Delta\varphi_g$. Данное состояние имеет два выхода. Если в процессе движения произошло пересечение траектории движения с линией переключения фазы, то переход осуществляется в состояние S_5. Отдельно обрабатывается условие смены фазы на угол π. В этом случае переход из состояния S_3 осуществляется сразу в состояние S_6.

В состоянии S_4 система выдаёт на вход контура меандр, фаза которого отличается от фазы сигнала, уже установившегося в контуре на 180°. Смысл этого состояния состоит в погашении энергии колебаний с фазой φ_0, присутствующих в контуре. Данное состояние имеет два выхода. Переход в состояние S_6 осуществляется, когда система пересекает линию переключения фазы. Второй выход – переход в состояние S_3. Условием перехода является пересечение траекторией движения оси OX_1 пространства состояния между фокусами F_1, F_2.

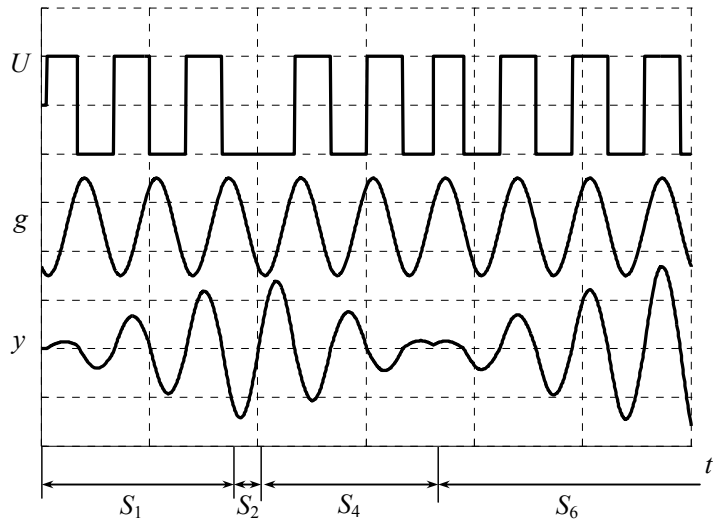


Рис.2. Переход фазы на 150°

В состоянии S_5 система выдаёт на вход колебательного контура постоянный уровень, обратный по величине уровню, присутствовавшему в предыдущем состоянии S_3. Выход из состояния S_5 – единственен. Он происходит в момент пере-

сечения траекторией движения системы оси OX_1 пространства состояния.

Состояние S_6 – конечное (по терминологии, принятой в [3], допускающее). Перейдя в него, система развивает колебания уже в новой фазе φ_g подобно тому, как это делалось в состоянии S_1.

Глядя на рис.1, легко заметить, что в конечное состояние S_6 из начального S_1 можно прийти тремя путями: $S_1 S_2 S_3 S_5 S_6$, $S_1 S_2 S_4 S_6$, $S_1 S_2 S_4 S_3 S_5 S_6$.

Пример реализации системой второго пути показан на рис.2, где использованы следующие обозначения: g – синусоидальный сигнал с конечной фазой; U – управляющее напряжение, присутствующее на клеммах источника ЭДС; y – ток, развивающийся в последовательном колебательном контуре.

Расчёт графиков выполнен путём моделирования поведения системы в пакете MatLAB с использованием утилиты Simulink.

Следует заметить, что состояния S_1 и S_6 возникают до начала перехода фазы, либо после его окончания. Отработка собственно перехода выполняется системой в состояниях S_2, S_3, S_4 и S_5.

Таким образом, описанная машина состояния обеспечивает мгновенный переход фазы, проходя при этом не более чем через четыре состояния.

Литература

1. *Назаров Н.М.* Переключение фазы на произвольный угол в высокодобротном последовательном колебательном контуре / Н.М. Назаров // Теория и техника радиосвязи : науч.-техн. сб. / ВНИИС. – Воронеж, 2005. – Вып. 2. – С. 55–62.

2. *Стешенко В.Б.* ПЛИС фирмы «Altera»: элементная база, система проектирования и языки описания аппаратуры / В.Б. Стешенко. – М. : Издат. дом «Додека – XXI», 2002.

3. *Хопкрофт Джон Э.* Введение в теорию автоматов, языков и вычислений : пер. с англ. – 2-е изд. / Хопкрофт Джон Э., Мотвани Раджив, Ульман Джефри Д. – М. : Издат. дом «Вильямс», 2002.

4. *Лазарев В.Г.* Синтез управляющих автоматов / В.Г. Лазарев, Е.И. Пийль. – М. : Энергоатомиздат, 1989.

Получено 26.07.06г.

УДК 621.391

СОПРЯЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОННО-ПЕРЕСТРАИВАЕМЫХ ФИЛЬТРОВ

М.А. КОРОЛЬКОВ, Л.А. МАЛЬЦЕВА

Рассматриваются: технология сопряжения электронно-перестраиваемых фильтров, методы формирования управляющих напряжений, методы интерполяции. Даются рекомендации инженерам-разработчикам.

Высокая эффективность систем с ППРЧ может быть обеспечена только в относительно широком диапазоне рабочих частот. Входные частотно-селективные цепи приемных устройств реализуются с помощью коммутируемых фильтров или перестраиваемых фильтров. При широком диапазоне рабочих частот переключаемые фильтры должны иметь значительное количество «фильтровых» линеек и дополнительные потери на их коммутацию. При малом количестве не обеспечивается достаточная избирательность. Перестраиваемые фильтры имеют более узкие полосы пропускания, позволяют работать с более низкими промежуточными частотами, получать хорошие параметры по избирательности и строить более простые приемные устройства с меньшим количеством преобразований частоты.

Перестраиваемые фильтры приемных устройств с ППРЧ имеют большое перекрытие по частоте. Перестраиваемые фильтры строятся на колебательных контурах или полосковых линиях, перестраиваемых емкостью, в качестве которой применяются варикапы. Для получения большого перекрытия используется полное включение варикапа в колебательный контур (без дополнительной растягивающей емкости). Варикапы имеют значительный разброс вольт-фарадных характеристик. По этой причине обеспечить сопряжение нескольких синхронно-перестраиваемых контуров довольно сложно. Существуют методы сопряжения системы контуров с помощью подстроечных элементов (под один общий закон управления частотой настройки) [1, 2]. Такой метод очень трудоемкий, требует высокой квалификации регулировщиков и не обеспечивает высокой точности сопряжения, поскольку количество степеней регулировки ограничено схемной реализацией. Развитие цифровой элементной базы, появление легко перепрограммируемых FLASH (запоминающих устройств большой емкости) позволило применить другую технологию сопряжения. Эта технология заключается в том, что для каждого колебательного контура «снимается» своя зависимость управляющего напряжения от частоты, которая записывается в память управляющего контроллера. Снятие кривой (измерение) производится в нескольких точках. В зависимости от реализации и ресурсов времени, вычислительной мощности и объема памяти может быть использован либо метод запоминания «снятых точек» с последующим вычислением непосредственно перед процессом перестройки, либо предварительное построение всей управляющей кривой (для всей сетки рабочих частот) во время проведения регулировочных работ на предприятии-изготовителе. Второй метод наиболее эффективен, поскольку требует минимум вычислительных затрат и времени на управление фильтрами, позволяет использовать более сложные и точные методы интерполяции, но требует большого объема памяти для хранения таблиц. Современные управляющие контроллеры имеют достаточный для этих целей объем памяти.

Барьерная емкость *p-n* перехода [3]

$$C_g = a \cdot \left(\varphi_k + U_c\right)^{-n}, \qquad (1)$$

где a – постоянная, пропорциональная площади *p-n* перехода, зависящая от концентрации примесей и от диэлектрической проницаемости;

φ_k – контактная разность потенциалов (для кремния $\varphi_k = 0{,}8$ В);

U_c – внешнее напряжение смещения (знак выбран так, что при обратных смещениях $U_c > 0$);

n – показатель степени, зависящий от характера распределения примесей;

для резкого перехода $n = 1/2$;

для плавного перехода с градиентом концентрации примесей $n = 1/3$.

Для полного включения варикапа ($n = 1/2$), когда контурная емкость определяется только емкостью варикапа, нормированная функция настройки имеет вид

$$\frac{f}{f_{\max}} = \sqrt[4]{\frac{x}{x_{\max}}}, \qquad (2)$$

где $x = \varphi_k + U_c$.

С учетом дополнительной параллельной емкости c_0: [1]

$$\frac{f}{f_{\max}} = \sqrt{\frac{1+b_0}{b_0 + \sqrt{\frac{x_{\max}}{x}}}}, \qquad (3)$$

где $b_0 = \frac{c_0}{c_{\min}}$, $c_{\min}$ – емкость варикапа при смещении $x = x_{\max}$.

При использовании варикапов для настройки колебательных контуров радиоприемных устройств возникают две задачи: согласование настроек ряда колебательных контуров, настраиваемых на одну частоту (в преселекторе), и сопряжение настройки преселектора с настройкой колебательного контура гетеродина, частота которого сдвинута на величину промежуточной частоты. Задачи сводились к единообразному изменению управляющего напряжения, а технологический разброс емкостей варикапов и параметров колебательных контуров компенсировался различными схемами сопряжения [1–3]. С развитием микроэлектроники и цифровой техники более перспективной, на наш взгляд, является технология сопряжения, которая заключается в том, что управление варикапами осуществляется с помощью микроконтроллера и цифро-аналоговых преобразователей. Заметим, что речь идет о больших перекрытиях по частоте, полном включении варикапа в колебательный контур и полосами контуров значительно меньших диапазона частотного перекрытия. Управляющее напряжение варикапа формируется для каждого конкретного колебательного контура. Для сопряжения нескольких колебательных контуров (в том числе и гетеродинных) каждое управляющее напряжение измеряется в процессе регулировки радиоприемного устройства в нескольких точках рабочего частотного диапазона. Промежуточные значения управляющих напряжений, находящиеся между измеренными точками функции управления, вычисляются с использованием различных интерполирующих функций (об этом ниже) и заносятся в память контроллера или вычисляются непосредственно перед изменением рабочей частоты приемного устройства, в зависимости от конкретных задач и ресурсов схемы и времени.

Схема формирования управляющих напряжений

Схема на рис.1 состоит из счетверенного ЦАП и масштабных усилителей в инвертирующем включении. Смещение, подаваемое с делителя *R*5, *R*6, позволяет полнее использовать разрешающую способность ЦАП.

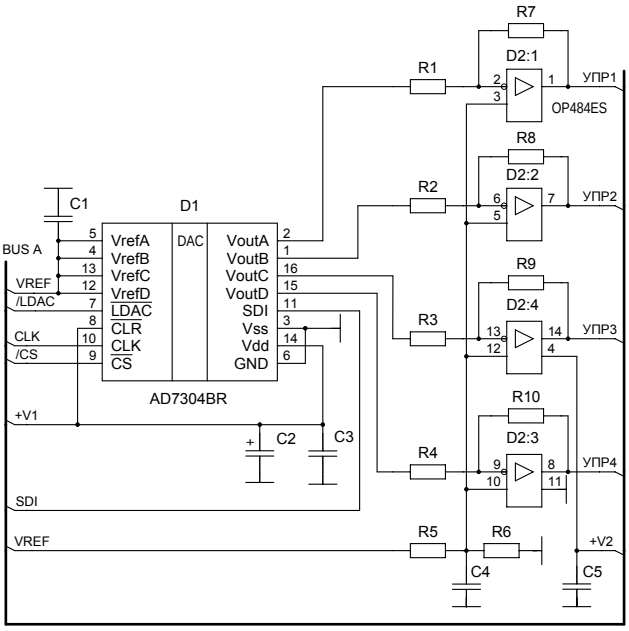


Рис.1 Схема формирования управляющих напряжений

Выходное напряжение масштабирующего усилителя определяется формулой

$$U_c = U_o \cdot (1+k) - k \cdot U_{DAC}, \qquad (4)$$

где U_c – выходное управляющее напряжение;

U_o – напряжение смещения масштабного усилителя;

k – коэффициент усиления операционного усилителя в инвертирующем включении, равный отношению резисторов k = R7/R1;

U_{DAC} – выходное напряжение ЦАП;

$U_{DAC} = \frac{U_{REF} \cdot n}{N}$; n – код ЦАП;

N – максимальный код ЦАП;

U_{REF} – опорное напряжение ЦАП.

Обозначим $U_o \cdot (1+k) = U_{\max}$, $\frac{k \cdot U_{REF}}{N \cdot (\varphi_k + U_{\max})} = S$,

тогда

$$U_c = U_{\max} - S \cdot n. \qquad (5)$$

Подставляя (5) в (2), получим зависимость частоты настройки контура от кода ЦАП (6):

$$f/f_{\max} = \sqrt[4]{1 - S \cdot n}\,. \qquad (6)$$

Обратная для (6) функция представлена выражением (7):

$$n = \frac{1 - \left(f/f_{\max}\right)^4}{S}\,. \qquad (7)$$

Формула (7) дает вещественное значение *n*, которое должно быть округлено до ближайшего целого.

Параметры масштабного усилителя выбирают следующим образом:

1) моделированием или расчетом определяют крайние значения управляющего напряжения с учетом разбросов параметров схем

$$U_{c\ \max} \text{ и } U_{c\ \min};$$

2) находят коэффициент усиления масштабного усилителя: $k = \dfrac{U_{c\max} - U_{c\min}}{U_{REF}}$; предполагается, что $U_{DAC\ \max} = U_{REF}$ при $n = N$;

3) определяют напряжение смещения:

$$U_o = \frac{U_{c\max}}{1 + k};$$

4) по полученным значениям *k* и U_o рассчитывают номиналы соответствующих резисторов схемы (рис.1).

Интерполяция

1. Кусочно-линейная (полиномами Лагранжа первой степени)

Самый простой метод интерполяции управляющего закона изменения управляющего напряжения на варикапах – метод кусочно-линейного интерполирования. В этом случае измеренные точки соединяются кусочно-линейной ломаной линией, точно воспроизводящей управляющее напряжение только в измеренных точках (4).

Пусть измерены $N+1$ точек с координатами k – й точки x_k, y_k, $k = 0,1...N$.

Здесь и далее y_k представляет собой код ЦАП соответствующий относительной частоте настройки x_k (теоретическое описание дано формулой (7)). Тогда аналитическое выражение для кусочно-линейной интерполяции можно записать, используя выражение, описывающее прямую линию:

$$S_k(x) = y_k + d_k\left(x - x_k\right), \qquad (8)$$

где $d_k = \dfrac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}$.

Выражение (4) может быть преобразовано к виду

$$S_k(x) = y_k \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + y_{k+1} \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} =$$

$$= y_k \cdot L_{1,k}(x) + y_{k+1} \cdot L_{1,k+1}(x). \qquad (9)$$

$L_{1,k}$, $L_{1,k+1}$ называют коэффициентами полинома Лагранжа [4]

2. Интерполяция полиномами Лагранжа более высокой степени

Обобщая (9), построим полином Лагранжа $P_K(x)$ степени, не большей, чем *N* [4], который проходит через $N+1$ точку с координатами (x_k, y_k):

$$S_k(x) = \sum_{k=0}^{K} y_k \cdot L_{N,k}(x), \qquad (10)$$

где $L_{N,k}(x) = \dfrac{\Pi_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{N}\left(x - x_j\right)}{\Pi_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{N}\left(x_k - x_j\right)}$.

Для четырех точек полином Лагранжа третьей степени имеет вид

$$S_3(x) = y_0 \cdot \frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)}{(x_0-x_1)\cdot(x_0-x_2)\cdot(x_0-x_3)} +$$

$$+ y_1 \cdot \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)}{(x_1-x_0)\cdot(x_1-x_2)\cdot(x_1-x_3)} +$$

$$+ y_2 \cdot \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_3)}{(x_2-x_0)\cdot(x_2-x_1)\cdot(x_2-x_3)} +$$

$$+ y_3 \cdot \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)}{(x_3-x_0)\cdot(x_3-x_1)\cdot(x_3-x_2)}. \qquad (11)$$

По-прежнему полином воспроизводит точно значения y_k в точках x_k.

Остаточный член для приближения полиномом Лагранжа *N*-й степени непрерывной функции *f*(*x*):

$$E_N(x) = \frac{(x-x0)\cdot(x-x1)\cdots(x-x_N)\cdot f^{(N+1)}(c)}{(N+1)!}$$

для некоторого $c = c(x)$, лежащего на интервале $[a,b]$.

3. Интерполяция кубическими сплайнами

Метод интерполирования кубическими сплайнами заключается в построении функции $S_k(x)$, которая точно совпадает с измеренными значениями и имеет непрерывную производную вблизи точек x_k и на интервалах $[x_k;\ x_{k+1}]$ [4]. Аналитическое выражение для кусочно-кубических функций $S_k(x)$ можно записать в следующем виде:

$$S_k(x) = -\frac{m_k}{6\cdot h_k}\cdot(x_{k+1}-x)^3 + \frac{m_{k+1}}{6\cdot h_k}\cdot(x-x_k)^3 + \left(\frac{y_k}{h_k} - \frac{m_k\cdot h_k}{6}\right)\cdot(x_{k+1}-x) + \left(\frac{y_{k+1}}{h_k} - \frac{m_{k+1}\cdot h_k}{6}\right)\cdot(x-x_k), \quad (8)$$

где $h_k = x_{k+1}-x_k$, $m_k = S''(x_k)$, $m_{k+1} = S''(x_{k+1})$ для $x_k \le x \le x_{k+1}$, $k = 0,1,...,N-1$.

Выражение (8) содержит неизвестные параметры $\{m_k\}$ и коэффициенты, полученные в результате выполнения простых арифметических действий над заданными точками. Для того чтобы найти значения коэффициентов $\{m_k\}$, нужно решить следующую систему $(N-1)$ линейных уравнений с $(N+1)$ неизвестными:

$$h_{k-1}\cdot m_{k-1} + 2\cdot(h_{k-1}+h_k)\cdot m_k + h_k\cdot m_{k+1} = 6\cdot(d_k - d_{k-1}), \quad (12)$$

где $d_k = \frac{y_{k+1}-y_k}{x_{k+1}-x_k}$, для $k = 1,2...,N-1$.

Для однозначности решения данной системы линейных уравнений необходимо доопределить производные в граничных точках. Для более точной интерполяции можно экстраполировать производную на крайние точки, однако более простое решение, дающее достаточную точность, – вычисление производных граничных точек по граничным интервалам. Для этого необходимо дополнить систему линейных уравнений (12) уравнениями

$$S'(x_0) = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0},\ S'(x_N) = \frac{y_N-y_{N-1}}{x_N-x_{N-1}}.$$

Тогда коэффициенты $m_0 = \frac{3}{h_0}\cdot(d_0 - S'(x_o)) - \frac{m_1}{2}$;

$m_N = \frac{3}{h_{N-1}}\cdot(S'(x_N) - d_{N-1}) - \frac{m_{N-1}}{2}$.

4. Подгонка параметров функции с использованием метода линеаризации данных

Возможно применение метода укладки управляющей кривой по измеренным точкам. Такой метод уточняет параметры заранее известной функции (для нашего случая функции (7)) и укладывает кривую по критерию минимума среднеквадратичной ошибки вблизи измеренных значений. В этом случае кривая может не совпадать со значениями измеренных точек, но она отражает характер заданной кривой. Широко известен метод укладки прямой $y = Ax+B$ по измеренным точкам $\{x_k, y_k\}$ по минимуму среднеквадратичной ошибки. Функция (7) – нелинейная, поэтому для такого класса функций применяется метод предварительной линеаризации данных с последующим приближением методом наименьшего среднеквадратического отклонения.

Преобразуем функцию (7) к виду

$$y = C\cdot x^A, \quad (13)$$

$$1 - n\cdot S = (f/f_{\max})^4;$$

$$y = 1 - n\cdot S; \quad (14)$$

$$x = (f/f_{\max}). \quad (15)$$

Поскольку параметры функции (1) и (2) заданы не точно и зависят соответственно от технологии изготовления варикапа и колебательного контура, то будем оптимизировать параметры (13) по измеренным точкам.

Пусть измерены $N+1$ точек с координатами k-й точки $(f_k/f_{\max})$, n_k, $k = 0,1,...N$.

Линеаризуем (13) логарифмированием и заменой переменных:

$$\ln(y) = A\cdot\ln(x) + \ln(C);$$

$$X = \ln(x);\ Y = \ln(y);\ C = e^B.$$

Линеаризованная форма: $Y = A\cdot X + B$.

Далее методом наименьших квадратов осуществляется подгонка функции по преобразованным точкам X_k, Y_k.

Нормальные уравнения для нахождения параметров A и B:

$$\left(\sum_{k=1}^{N} X_k^2\right)\cdot A+\left(\sum_{k=1}^{N} X_k\right)\cdot B=\sum_{k=1}^{N} X_k\cdot Y_k;$$
$$\left(\sum_{k=1}^{N} X_k\right)\cdot A+N\cdot B=\sum_{k=1}^{N} Y_k\ . \qquad (16)$$

После вычисления A и B делаются обратные преобразования к нелинейной функции (7).

Рекомендации по выбору необходимой разрядности ЦАП и количества измеряемых точек

Очевидно, что погрешность, вносимая дискретностью ЦАП, будет максимальна в области нижней частоты. Приняв погрешность дискретизации равной половине дискрета и предположив полное использование кодов ЦАП, можно определить относительную погрешность частоты настройки, вызванную дискретным характером управляющего напряжения. Для этого введем коэффициент перекрытия фильтра по частоте:

$$k_f = f_{\max}/f_{\min}\ .$$

Из формулы (6) можно получить приближенную оценку относительной погрешности настройки фильтра (18). Приближенная формула справедлива для $\delta f/f_{\min} << 1$. На практике это соотношение всегда выполняется, подтверждение чему можно увидеть в табл.1.

$$\frac{\delta f}{f_{\min}}\approx\frac{0{,}125}{N}\cdot\frac{\left[1-\left(1/k_f\right)^4\right]}{\left(1-\left[1-\left(1/k_f\right)^4\right]\right)}. \qquad (18)$$

Расчеты по формуле (18) сведены в табл.1.

Таблица 1

Относительная погрешность настройки фильтров

Разрядность ЦАП	Коэффициент перекрытия по частоте				
	1,2	1,3	1,5	1,7	2,0
8	$5{,}26\cdot10^{-4}$	$9{,}1\cdot10^{-4}$	$20\cdot10^{-4}$	$36\cdot10^{-4}$	$73{,}5\cdot10^{-4}$
10	$1{,}3\cdot10^{-4}$	$2{,}3\cdot10^{-4}$	$4{,}9\cdot10^{-4}$	$9\cdot10^{-4}$	$18{,}3\cdot10^{-4}$
12	$3{,}3\cdot10^{-5}$	$5{,}7\cdot10^{-5}$	$12{,}5\cdot10^{-5}$	$22{,}7\cdot10^{-5}$	$46{,}3\cdot10^{-5}$
14	$0{,}8\cdot10^{-5}$	$1{,}4\cdot10^{-5}$	$3{,}1\cdot10^{-5}$	$5{,}67\cdot10^{-5}$	$11{,}6\cdot10^{-5}$
16	$0{,}21\cdot10^{-5}$	$0{,}36\cdot10^{-5}$	$0{,}78\cdot10^{-5}$	$1{,}42\cdot10^{-5}$	$2{,}9\cdot10^{-5}$

Относительная погрешность, приведенная в табл.1, вычислена в предположении полного использования ЦАП. На практике из-за разбросов параметров контуров делается запас по перекрытию управляющих напряжений. Погрешность в этом случае превосходит приведенную в таблице. Реальную погрешность можно вычислить с помощью поправочного коэффициента $k(n)$ или непосредственно по формуле (18), подставив вместо N, ($n_{\max}-n_{\min}$):

$$k(n)=\frac{N}{n_{\max}-n_{\min}},\quad \frac{\delta f(n)}{f_{\min}}\approx\frac{\delta f}{f_{\min}}\cdot k(n),$$

где $n_{\max}$, $n_{\min}$ – соответственно максимальный и минимальный код ЦАП реально используемого диапазона кодов ЦАП.

Количество измеряемых точек должно выбираться с учетом коэффициента перекрытия по частоте и возможностей алгоритма интерполяции. Для минимизации максимального значения погрешности выберем расположение измеряемых точек с равным перекрытием по частоте. Коэффициент перекрытия на интервале между соседними точками для m точек определится как корень степени $m-1$ из общего коэффициента перекрытия фильтра $k_f(m)=\sqrt[(m-1)]{k_f}$.

Проведем сравнение методов интерполяции на примере с параметрами: $m=4$; k_f = 1,5; разрядность ЦАП = 8. Вычислим значения кодов ЦАП по формуле (7). Определим максимальное отклонение кодов ЦАП, используя представленные методы интерполяции. В табл.2 представлены максимальные отклонения кода (Δn) на каждом интервале между измеряемыми точками и соответствующее относительное отклонение частоты в частотных точках максимальной погрешности на каждом интервале.

Для выбора необходимого количества измеряемых точек приведем погрешность относительной частоты настройки в зависимости от коэффициента перекрытия интервала между соседними точками и метода интерполяции. В примере коэффициент перекрытия по частоте $k_f=2$. Погрешности сведены в табл.3.

Данные, приведенные в табл.3, позволяют оценить необходимое количество измеряемых точек. Следует отметить особенность интерполя-

ции полиномами Лагранжа: при количестве точек более 4-х степень полинома становится равной или выше четвертой. Исходная функция (7) также представляет собой полином четвертой степени, поэтому можно наблюдать совпадение кривых.

Таблица 2

Максимальные погрешности кода ЦАП и соответствующие относительные погрешности настройки по частоте в зависимости от методов интерполяции

Метод интерполяции	Интервал 1		Интервал 2		Интервал 3	
	Δn	$\Delta f/f$	Δn	$\Delta f/f$	Δn	$\Delta f/f$
кусочно-линейный	2,72512	$6{,}5313\cdot10^{-3}$	3,499326	$5{,}105\cdot10^{-3}$	4,370268	$4{,}099\cdot10^{-3}$
полиномом Лагранжа	$3{,}226\cdot10^{-2}$	$8{,}426\cdot10^{-5}$	$1{,}8145\cdot10^{-2}$	$2{,}694\cdot10^{-5}$	$3{,}226\cdot10^{-2}$	$2{,}919\cdot10^{-5}$
кубическими сплайнами	1,881084	$4{,}8034\cdot10^{-3}$	1,197815	$1{,}762\cdot10^{-3}$	3,136551	$2{,}83\cdot10^{-3}$

Таблица 3

Относительная погрешность частоты настройки, вызванная интерполяцией от перекрытия по интервалу между соседними измеряемыми точками

Метод интерполяции	Количество измеряемых точек и перекрытие по частоте на одном интервале				
	4 (1,26)	5 (1,189)	6 (1,149)	7 (1,122)	8 (1,104)
кусочно-линейный	$18{,}63\cdot10^{-3}$	$11{,}883\cdot10^{-3}$	$7{,}273\cdot10^{-3}$	$5{,}239\cdot10^{-3}$	$3{,}6512\cdot10^{-3}$
полиномом Лагранжа	$4{,}2156\cdot10^{-4}$	$3{,}3307\cdot10^{-16}$	$4{,}44\cdot10^{-16}$	$3{,}33\cdot10^{-16}$	$5{,}55\cdot10^{-16}$
кубическими сплайнами	$12{,}532\cdot10^{-3}$	$3{,}1428\cdot10^{-3}$	$8{,}244\cdot10^{-4}$	$4{,}135\cdot10^{-4}$	$1{,}1687\cdot10^{-4}$

Выводы. Для большинства практических случаев при $k_f = 1{,}3 - 1{,}7$ и относительной полосе фильтра (2–4)% достаточно 8–10-разрядного ЦАП. Среди методов интерполяции максимальное сходство с исходной зависимостью дает полином Лагранжа. Необходимое количество измеряемых точек для интерполяции полиномами Лагранжа 4–5. При низкой точности измерений можно рекомендовать метод подгонки параметров. Однако дисперсия ошибки с ростом количества измеряемых точек уменьшается медленно (как $\sqrt{m}$), кроме того, при линеаризации плотность вероятности распределения ошибки измерений также претерпевает изменения и требуется внимание при оценке погрешности.

Литература

1. А.С. №860290. H03 J3/32. Устройство формирования напряжения для сопряженной настройки электронно-перестраиваемых контуров.

2. А.С. №780163. H03 J3/18. Способ сопряжения настройки контуров.

3. *Лабутин В.К.* Колебательный контур, перестраиваемый нелинейной емкостью / В.К. Лабутин. – М.–Л. : Энергия, 1964.

4. *Мэтьюз Д.Г.* Численные методы. Использование MATLAB / Мэтью Д.Г., Финк К.Д. – М.–СПб.–Киев, 2001. – 714с.

Получено 5.03.07 г.

Адрес редакции:

394018, г.Воронеж, ул.Плехановская, 14
ОАО «Концерн «Созвездие», редакция сборника
«Теория и техника радиосвязи».
Тел. 52-13-59
E-mail: osp@sozvezdie.su